

独立成分解析を用いた構造物の動特性と入力 の同時推定法

佐藤忠信¹・市田賢²

¹ 工博 京都大学教授 防災研究所耐震基礎分野 (〒611-0031 京都府宇治市五ヶ庄)

² 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒611-0031 京都府宇治市五ヶ庄)

A new system identification technique is proposed to identify simultaneously input force and system parameters. This is a very challenging problem in the field of inverse analysis. In order to solve this difficult problem we use Independent Component Analysis (ICA) and Monte Carlo filter (MCF). ICA is a strong tool to estimate input force and MCF is also useful to estimate structural parameters. The efficiency of proposed algorithm is evaluated by numerical simulation.

Key Words : system identification, Independent Component Analysis, Monte Carlo filter

1. はじめに

これまでに、構造物の健全性を推測し、損傷の検出を行う上で有用である様々なシステム同定手法が開発されてきた。観測値にノイズが混入している場合の取り扱いや観測データが欠落している条件下で構造物の状態を推定するというような問題が解かれてきた。このための手段としてモンテカルロフィルタやカルマンフィルタといったフィルタリング法は広く適用されている。

構造パラメータの推定問題では、入力の時刻歴が未知である場合を対象とすると、問題は非常に解きにくくなる。一般にシステム同定は入力時刻歴と構造物の応答加速度、速度、変位が観測されるとして、構造物の動特性である剛性や減衰の推定を試みることが多い。構造物の動特性を表すパラメータは一般的には定常で時間に依らない場合が多いことから、比較的求めることが容易であると言える。しかし、入力時刻歴は時間毎に変動するため、運動方程式の他の変数が既知でない限り、それを決定するのは困難である。

構造物の動特性と共に入力時刻歴も未知であるとして、構造物の応答値のみからそれらの推定を行うことは、従来のフィルタ理論を用いただけでは解決することができなかった。そこで、本研究ではこの問題に対して多変量解析の一手法である独立成分解析とモンテカルロフィルタを用いることにより解決を試みた。

2. モンテカルロフィルタ

モンテカルロフィルタは、「粒子」と呼ばれる多数の実現値によって状態量の確率分布の近似を行う非線形非ガウスの状態空間モデルのフィルタリングアルゴリズムである。従来のフィルタ理論とは異なり線形ガウス空間の制約を解消し、非線形なパラメータの変化や、非ガウス分布である雑音などを扱うことのできるより一般的なフィルタ理論である。

本節では、粒子と呼ばれる実現値を用いることにより逐次的に近似された予測及びフィルタ分布を与えるモンテカルロフィルタアルゴリズムについて説明する。

非線形非ガウス型の状態空間モデルについて考える。

$$x_n = F(x_{n-1}, v_n) \quad (1)$$

$$z_n = H(x_n, w_n) \quad (2)$$

(1) モンテカルロフィルタアルゴリズム

観測ノイズ v_n は状態量 x_n と観測量 z_n により微分可能な関数 G を用いて以下のように表されるものとする。

$$\begin{aligned} v_n &= H^{-1}(z_n, x_n) \\ &= G(z_n, x_n) \end{aligned} \quad (3)$$

分布 $p(x_n | z_{n-1})$ に従う粒子を予測粒子 p_n 、分布 $p(x_n | f_n)$ に従う粒子をフィルタ粒子 f_n とすると、モン

テカルロフィルタアルゴリズムは以下のように表すことができる。

1. $j = 1 \sim m$ について乱数 $f_0^{(j)} \sim p_0(x)$ を生成し、状態量の初期分布を作成する

2. $n = 1 \sim N$ について以下の過程を繰り返す

(a) $j = 1 \sim m$ について乱数 $w_n^{(j)} \sim q(w_n)$ を生成し、システムノイズ粒子を作成する。

(b) $j = 1 \sim m$ について次式の状態方程式より粒子の遷移を計算する

$$p_n^{(j)} = F(f_{n-1}^{(j)}, w_n^{(j)}) \quad (4)$$

(c) $j = 1 \sim m$ について尤度を次式で計算する

$$\alpha_n^{(j)} = r(G(z_n, p_n^{(j)})) \left| \frac{\partial G}{\partial z_n} \right| \quad (5)$$

(d) $j = 1 \sim m$ について $\alpha_n^{(j)}$ に比例する確率で $\{p_n^{(j)} \dots p_n^{(m)}\}$ を復元抽出することにより $f_n^{(j)}$ を得る

$$f_n^{(k)} = p_n^{(k)} \quad \text{with probability} \quad \frac{\alpha_n^{(k)}}{\sum_{j=1}^{(m)} \alpha_n^{(j)}} \quad (6)$$

(e) (a) に戻る。

3. 独立成分解析

独立成分解析は、互いに独立な信号（原信号）の線形混合である観測信号しか得られない条件の下で、原信号の再現をアルゴリズムである。扱う線形モデルは次式で表される。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (7)$$

ただし、 \mathbf{x} は観測信号、 \mathbf{A} は混合行列、 \mathbf{s} は原信号を表す。

つまり、独立成分解析では、観測信号 \mathbf{x} だけを既知として、混合行列 \mathbf{A} と原信号 \mathbf{s} の推定を行う。原信号 s_1, \dots, s_n はそれぞれ独立であり、各 s_i の平均値は 0 であるという仮定ができれば、原信号の確率密度関数 $r(\mathbf{s})$ はその独立性により次式の様に表される。

$$r(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^n r_i(s_i) \quad (8)$$

$$E[s_i] = 0 \quad (9)$$

ここで、式 (7) を行列 \mathbf{W} を用いて次のように書き換え、次式で与えられる信号 $\mathbf{y}(t)$ を考える。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t) \quad (10)$$

もし、 \mathbf{W} が \mathbf{A} の逆行列、つまり $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}$ であれば $\mathbf{y}(t) = \mathbf{s}(t)$ が成り立ち、原信号が復元されることになる。従って、観測データ $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(T)$ から \mathbf{A}^{-1} を推定して、これを \mathbf{W}_t とおき、学習的に更新することにより、 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}_t \mathbf{x}(t)$ を求めることができる。

(1) 学習アルゴリズム

式 (7) において、原信号 \mathbf{s} の確率分布関数を $r(\mathbf{s})$ としたとき、混合マトリクス \mathbf{A} により与えられる観測信号 \mathbf{x} の確率分布 $p(\mathbf{x}; \mathbf{A})$ を求める。

原信号が \mathbf{s} と $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$ の間に発生する確率が $r(\mathbf{s})d\mathbf{s}$ であるから、このとき観測信号 \mathbf{x} が \mathbf{x} と $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ の間に発生し、これらの確率は等しいので次式が得られる。

$$p(\mathbf{x}; \mathbf{A}) d\mathbf{x} = r(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (11)$$

また、 \mathbf{A} の行列式を $|\mathbf{A}|$ とすると、

$$d\mathbf{x} = |\mathbf{A}| d\mathbf{s} \quad (12)$$

の関係が得られる。従って、式 (11) は次式のように表される。

$$p(\mathbf{x}; \mathbf{A}) = r(\mathbf{s}) |\mathbf{A}|^{-1} \quad (13)$$

また、 $\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ であるので上式は次式のように表される。

$$p(\mathbf{x}; \mathbf{W}) = r(\mathbf{W}\mathbf{x}) |\mathbf{W}| \quad (14)$$

このとき、 \mathbf{W} に対して $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(T)$ の発生する確率は、

$$\prod_{t=1}^T p(\mathbf{x}(t); \mathbf{W}) \quad (15)$$

と表され、この対数を取ると、

$$L(\mathbf{W}) = \sum_{t=1}^T \log p(\mathbf{x}(t); \mathbf{W}) \quad (16)$$

となる。この対数尤度関数に対して、尤度最大となる \mathbf{W} を選ぶことにより、推定値 $\hat{\mathbf{W}}$ 及び $\hat{\mathbf{s}}$ が得られる。最尤推定量 $\hat{\mathbf{W}}$ を求めるためには、式 (16) を \mathbf{W} で微分して 0 とすればよい。こうして求められる学習アルゴリズムは、次のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{W}}_t &= \hat{\mathbf{W}}_{t+1} - \hat{\mathbf{W}}_t \\ &= -\eta_t (\mathbf{I} - \varphi(\mathbf{y})) \mathbf{y}^T \mathbf{W}_t \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 η_t は学習率、 φ は評価関数である。

(2) スケールの不定性

推定された原信号 y_j 及び混合行列 A_{ij} はベクトル及び行列の要素の順列と大きさに不定性を持つ。式 (7) を

要素で書くと次式で表されるように、 $A_{ij}y_j$ の和により観測信号 x_i が生成されるため、 A_{ij} と y_j のそれぞれの信号の大きさを定めることができない。

$$x_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}y_j \quad (18)$$

$$= \sum_{j=1}^n A_{ij}s_j \quad (19)$$

従って、独立成分解析で解として与えられる混合行列 A は、 \hat{A} を真の混合行列、 P を任意の置換行列、 D を任意の対角行列として次式のように表される。

$$A = \hat{A}PD \quad (20)$$

4. 入力時刻歴及び構造動特性の同時推定法

提案アルゴリズムでは図-1のように、1) 原信号同定、2) 振幅同定、3) システム同定の3つのステップにより入力時刻歴と構造パラメータの推定を行なっている。入力時刻歴は1)と2)の過程により推定され、構造物の動特性は3)により同定される。本節では提案アルゴリズムのそれぞれのステップについて説明する。

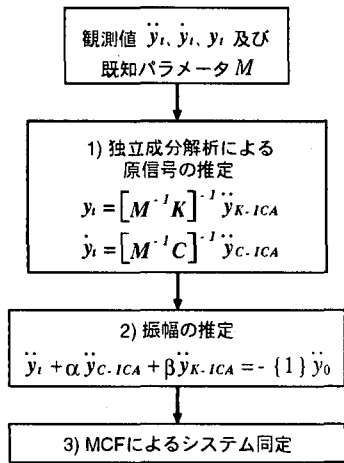


図-1 提案アルゴリズムのフローチャート

(1) 原信号同定

質量マトリクスの逆行列 M^{-1} を左から掛けた減衰力 $M^{-1}C\dot{y}$ 及び復元力 $M^{-1}Ky$ を独立成分解析を用いて推定することを考える。地動加速度を入力としたときの構造物の運動方程式は次のように表される。

$$\ddot{y}_t + M^{-1}C\dot{y}_t + M^{-1}Ky_t = -\{1\}\ddot{y}_0 \quad (21)$$

ここで、 M 、 C 、 K はそれぞれ質量マトリクス、粘性減衰マトリクス、剛性マトリクスであり、 \ddot{y} 、 \dot{y} 、 y はそれぞれ構造物の地盤に対する相対加速度、相対速度、相対変位

を表している。また、 \ddot{y}_0 は地動加速度を表し、 $\{1\}$ は全ての要素が1のベクトルである。

復元力 $M^{-1}Ky$ に式(7)の独立成分解析モデルを適用するために、復元力項の各要素をそれぞれ次のように対応させて考える。

運動方程式	独立成分解析
$\ddot{y}_{K-ICA} = \{M^{-1}Ky_t\}$	\Rightarrow 原信号 s
$M^{-1}K$	\Rightarrow 混合行列 A
y_t	\Rightarrow 観測信号 x

従って、式(7)と同様な線形の独立成分解析モデルとして次式が得られる。

$$y_t = [M^{-1}K]^{-1} \ddot{y}_{K-ICA} \quad (22)$$

同様に、減衰力項 $M^{-1}C\dot{y}$ についても独立成分解析を適用できるモデルが次のように与えられる。

$$\dot{y}_t = [M^{-1}C]^{-1} \ddot{y}_{C-ICA} \quad (23)$$

式(22),(23)によって与えられたモデルに対して独立成分解析を用いることより、 $\ddot{y}_{K-ICA} = \{M^{-1}Cy_t\}$ 及び $\ddot{y}_{C-ICA} = \{M^{-1}Ky_t\}$ を推定することができる。

(2) 振幅同定

独立成分解析では原信号を推定することができるが、そのスケールについては不定性が残されている。従って、同定された \ddot{y}_{K-ICA} と \ddot{y}_{C-ICA} に対して振幅の大きさを求める必要がある。

$\{\ddot{y}_{K-ICA}\}_i$ と $\{\ddot{y}_{C-ICA}\}_i$ の振幅の大きさをそれぞれ α_i 、 β_i で表すとすると、運動方程式(21)は次のように書き換えられる。

$$\ddot{y}_t + \alpha \ddot{y}_{C-ICA} + \beta \ddot{y}_{K-ICA} = -\{1\}\ddot{y}_0 \quad (24)$$

ただし、 α 及び β は次式で表される対角行列である。

$$\alpha = \text{diag}\{\alpha_i\}^T, \quad i = 1, \dots, N \quad (25)$$

$$\beta = \text{diag}\{\beta_i\}^T, \quad i = 1, \dots, N \quad (26)$$

そこで、式(24)における未知量 α 、 β 、 \ddot{y}_0 をモンテカルロフィルタにより同定することを考え、式(24)をモンテカルロフィルタにおける観測方程式と見なす。まず、状態ベクトルを次のように与える。

$$x_t = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N, \ddot{y}_0(t)\}^T \quad (27)$$

式(2)で与えられた観測ベクトル z_t を式(24)の加速度応答ベクトル \ddot{y}_t を用いて、

$$z_t = -\ddot{y}_t \quad (28)$$

と定義すれば、式(27),(28)に対して、式(24)を満たすように観測行列 H が次式で与えられる。

$$H = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{C-ICA 1} & 0 & \ddot{y}_{K-ICA 1} & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddot{y}_{C-ICA N} & 0 & \ddot{y}_{K-ICA N} & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

よって、式(27),(28),(29)よりモンテカルロフィルタにおける観測方程式(2)を構成することができる。

一方、状態方程式(1)については、定常システムとして問題を扱うことで、状態遷移行列を単位行列で与えた。

(3) システム同定

モンテカルロフィルタを用いて線形構造システムの同定を行うためには、構造物の運動方程式を状態空間モデルとして表現する必要がある。従って、本節では、構造システムの状態空間モデルへの適用方法について述べる。

一般に、外力を受けている N 自由度構造系の運動方程式は

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P \quad (30)$$

で与えられる。

外力 P は地震による地動加速度を \ddot{y}_g として次のように表される。

$$P = -M1\ddot{y}_g \quad (31)$$

1 は要素が全て 1 の列ベクトルである。そこで、次のような状態ベクトルを考える。

$$x = \{ \dots y_i \dot{y}_i h_i \omega_i \dots \}^T \quad (32)$$

式(30)より、ここでは以下のような1階の微分方程式である状態空間方程式が得られる。

$$\dot{x} = g(x) = \begin{Bmatrix} \dots \dot{y}_i \ddot{y}_i \dot{h}_i \dot{\omega}_i \dots \\ \vdots \\ \dot{y}_i \\ -\ddot{y}_g - f_i + (1 - \delta_{i,n}) \frac{m_{i+1}}{m_i} f_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (33)$$

ただし、

$$f_i = 2h_i\omega_i(\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1}) + \omega_i^2(y_i - y_{i-1}) \quad (34)$$

$$y_i = \dot{y}_i = 0, \quad i = 0 \quad (35)$$

表-1 2自由度構造系の諸元

質量 m_i (kg)	1.2302×10^2
粘性減衰係数 c_i (kg/s)	6.8606×10^1
剛性 k_i (kg/s ²)	2.400869×10^4
減衰定数 $h_i \left(= \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}} \right)$	1.996×10^{-2}
固有円振動数 $\omega_i \left(= \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \right)$	13.970

表-2 モンテカルロフィルタによる構造動特性の同定条件

初期分布 p_0		システムノイズ分布 q	
α_i	$U(0.01, \{1.0 \times 10^{-3}\}^2)$	α_i	$N(0.0, \{1.0 \times 10^{-4}\}^2)$
β_i	$U(1.0, \{1.0 \times 10^{-2}\}^2)$	β_i	$N(0.0, \{1.0 \times 10^{-4}\}^3)$
\dot{y}_0	$U(0.0, \{1.0 \times 10^{-3}\}^2)$	\dot{y}_0	$N(0.0, \{1.0 \times 10^{-4}\}^2)$
観測共分散 R		$diag\{1.0 \times 10^{-6}\}$	
粒子数 m		5000	

表-3 モンテカルロフィルタによる構造動特性の同定条件

初期分布 p_0		システムノイズ分布 q	
y_i	$U(0.0, \{1.0 \times 10^{-6}\}^2)$	y_i	$N(0.0, \{1.0 \times 10^{-10}\}^2)$
\dot{y}_i	$U(0.0, \{1.0 \times 10^{-6}\}^2)$	\dot{y}_i	$N(0.0, \{1.0 \times 10^{-10}\}^2)$
c_i	$U(0.7 \times \hat{c}_i, \{0.01 \times \hat{c}_i\}^2)$	c_i	$N(0.0, \{0.003 \times \hat{c}_i\}^2)$
k_i	$U(0.7 \times \hat{k}_i, \{0.01 \times \hat{k}_i\}^2)$	k_i	$N(0.0, \{0.003 \times \hat{k}_i\}^2)$
観測共分散 R		$diag\{1.0 \times 10^{-6}\}$	
粒子数 m		5000	

ただし、 \hat{c}_i, \hat{k}_i はそれぞれ c_i 及び k_i の真値を表す。

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (36)$$

である。 h_i, ω_i はそれぞれ質点 i を取り出し、1自由度系と見なした時の微小線形振動時の等価減衰定数および等価固有円振動数であり、次式で定義される。

$$h_i = \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (37)$$

また、観測方程式について、全質点に関して変位及び速度応答が観測されるものとする観測行列 H_i は次のように表される。

$$H_i = \begin{bmatrix} D & & & \\ & \ddots & & \\ & & D & \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

5. 数値解析例

4節で提案したアルゴリズムを用いて数値解析を行い、その適用性と精度を検証した。解析の対象モデルは2自由度構造系であり、入力にはEl Centro地震加速度記録の最大加速度を25galに補正した波形を用いた。また、全質点の質量と応答加速度、速度、変位が観測されるとした。構造物の応答の観測値には、3%の観測ノイズを加えている。

原信号同定過程では、評価関数 $\varphi(y)$ として、

$$\varphi_i(y_i) = y_i^3 \quad (39)$$

を用いた。

振幅同定過程では、モンテカルロフィルタの粒子数を5000個として解析を行った。式(27)の状態量には、地動加速度 \ddot{y}_0 が含まれているため、モンテカルロフィルタにより地動加速度を直接推定しているが、定常である α や β とは異なり、時々刻々変化する地動加速度はモンテカルロフィルタの状態量では精度良く推定されない。解析ではこの状態量の地動加速度は精度の問題から推定値として利用しないこととした。しかし、同定された振幅の大きさ α, β を式(24)の左辺に代入して得られるベクトル $\{\dot{y}_t + \alpha \dot{y}_{C-ICA} + \beta \ddot{y}_{K-ICA}\}$ もまた各要素がそれぞれ地動加速度を表している。従って、このベクトルの各要素を平均した波形を地動加速度の推定値として用いることとした。

また、システム同定過程では、構造物の動特性の初期値として真値70%の値を与え、モンテカルロフィルタの粒子数を5000個とした。

数値解析に関する各諸元を表-1,2,3に示す。これらの条件下で、未知量である入力時刻歴と構造パラメータの推定を行った。得られた解析結果を図-2から図-6に示す。

まず、図-2は原信号同定過程から得られた独立成分解析による原信号 $M^{-1}Ky$ の同定結果である。図では $M^{-1}Ky$ のみを示しているが、 $M^{-1}Cy$ と共に原信号の再現が可能であることが確認できた。

次に振幅同定過程について、図-3はモンテカルロフィルタにより同定された振幅の大きさ β の時刻歴である。ほぼある一定の大きさに収束する結果が得られた。

図-4は原信号同定過程及び振幅同定過程の結果を用いて求められた地動加速度の同定時刻歴であり、図-5は地動加速度の真値をx軸、同定値をy軸に取って両者を比較した図であり、正確に推定が行われておれば、全ての点が $y = x$ 上に乗る。観測ノイズが付加されているにも関わらず、原信号同定過程、振幅同定過程共に効率的に機能し、提案アルゴリズムにより入力波形の再現が行えることが示されている。

図-6は同定された入力波形を用いて行った構造物の動特性の同定結果のうち、剛性について示している。ほ

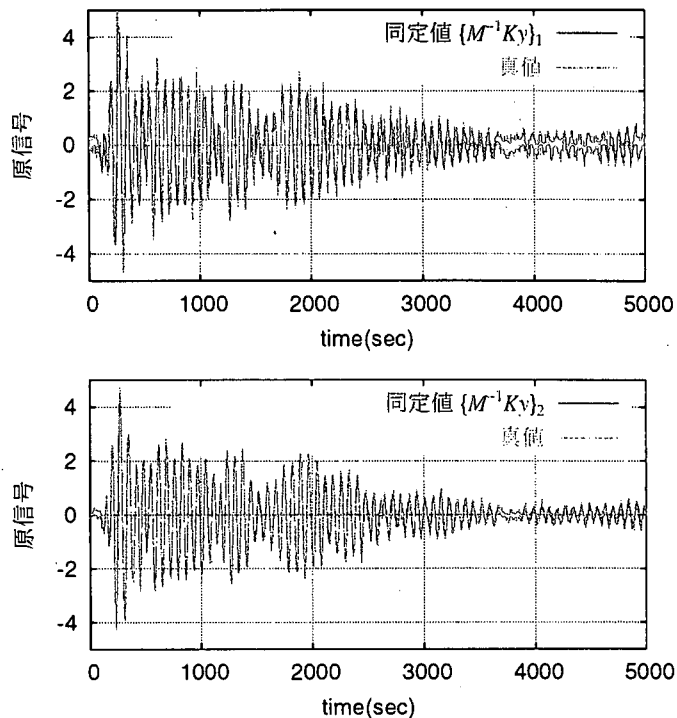


図-2 $M^{-1}Ky$ の同定時刻歴

ぼ真値に収束しており、本研究で取り上げた入力未知である場合においても、システム同定が可能であることを示している。ただし、運動方程式(30)において減衰項が他の項に比べて相対的に次元が小さいこと、同定された入力時刻歴を用いているため、そこに含まれる推定誤差が減衰マトリクス C を同定するためには相対的に大きかったことといった理由から減衰マトリクス C は精度良く推定することができなかった。

6. おわりに

本研究では、構造物への入力地震動と構造物の動特性を同時に同定する手法を独立成分解析とモンテカルロフィルタを用いることにより開発した。提案アルゴリズムでは減衰力及び復元力の時刻歴を独立成分解析で推定することによって入力時刻歴の推定を行った。

本研究はさらに高自由度の構造物への適用を試みるとともに、各種独立成分解析の適用を検討し、アルゴリズムの安定性や原信号の独立性についての考察などを行う予定である。

参考文献

- 1) S.Amari, T.P.Chen, A.Cichocki : Stability analysis of learning algorithms for blind source separation, *Neural Networks*, **10(8)**, pp. 1345-1351, 1997.

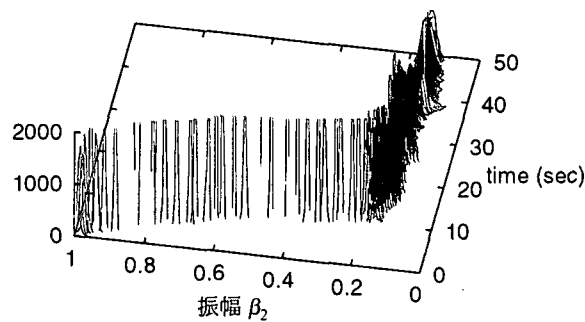
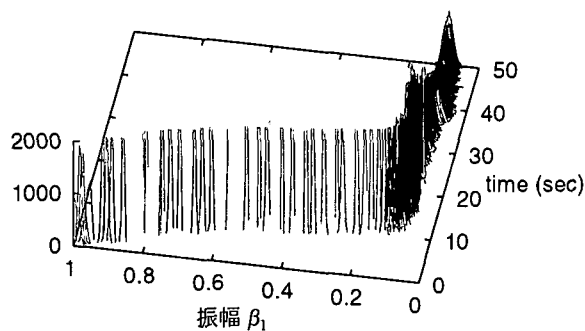


図-3 β の同定時刻歴

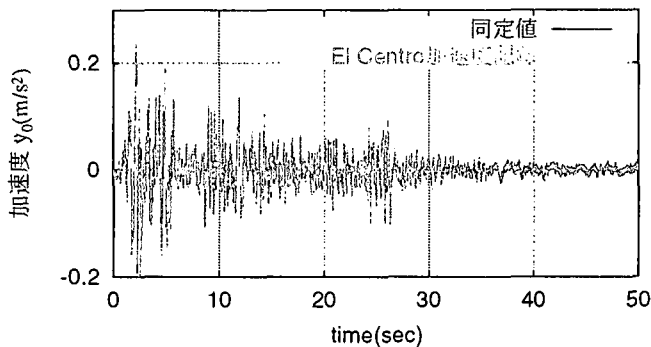


図-4 地動加速度 \ddot{y}_0 の同定時刻歴

- 2) 甘利俊一, 村田昇: 独立成分分析 多変量データ解析の新しい方法, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-18, サイエンス社, 2002.
- 3) 川鍋一晃, 村田昇: 独立成分解析のセミパラメトリック推定と情報幾何, 第3回情報幾何ワークショップ, 1999.
- 4) Aapo Hyvärinen: Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis, *IEEE Transactions on Neural Networks*, **10(3)**, pp. 626-634, 1999.
- 5) 北川源四郎: モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について, *統計数理*, **44(1)**, pp. 31-48, 1996.
- 6) Genshiro Kitagawa: Monte Carlo filter and smoother

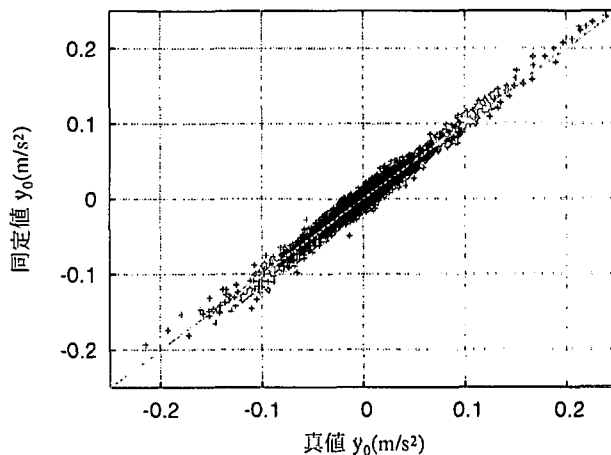
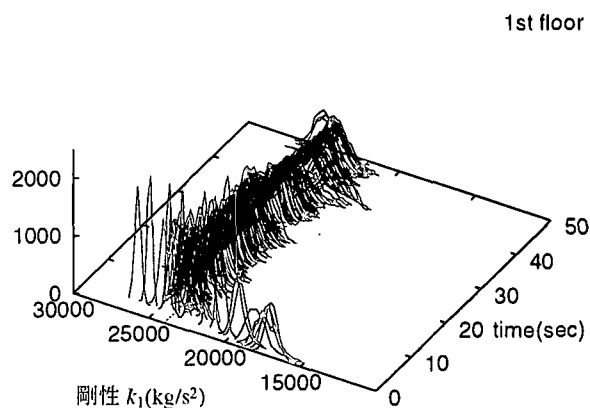
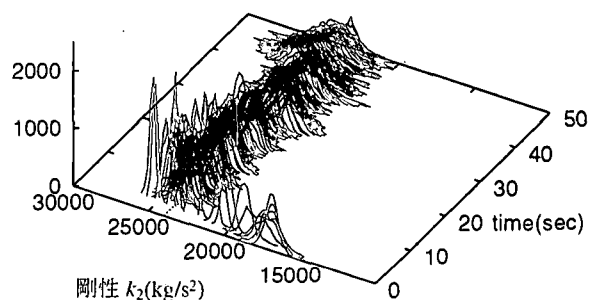


図-5 地動加速度 \ddot{y}_0 の同定値と真値の比較



1st floor



2nd floor

図-6 剛性 K の同定時刻歴

for non-Gaussian nonlinear state space models, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **5(1)**, pp. 1-25, 1996.

- 7) 佐藤忠信, 坂上貴士, 吉田郁政: 各種統計的フィルタ理論の合成に基づく非線形構造同定アルゴリズムの開発, 第3回構造物の破壊過程解明に基づく地震防災性向上に関するシンポジウム, pp. 1-6, 2002.