

地震時における剛体の3次元挙動について

清野純史¹・三浦房紀²・小川誠之³

¹正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木システム工学専攻 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)

²正会員 山口大学教授 知能情報システム工学科 (〒755 山口県宇部市常盤台 2557)

³NTT(株)中国支社山口支店 (〒753 山口県山口市熊野町 4-5)

1995年の阪神大震災では死者の89%が家屋の倒壊や家具類の転倒による圧迫死や窒息死であったという報告がなされている。また、地震が起こった際の構造物内部にある付帯設備の移動(転倒・散乱、落下など)による被害も甚大であった。災害軽減のための構造物内部空間のあり方を追求し、その安全性を向上させるためには、これらの地震時挙動を詳細に把握する必要がある。建物内の什器類、さらに一般的には構造物内部に配置されている付帯設備を剛体とみなし、地震時の転倒特性を解明するために過去多くの研究が行われてきたが、それらの大半は対象空間を二次元平面として取り扱っていた。本研究では、問題空間を三次元へと拡張するとともに、三次元の剛体運動モード間の推移を整理し、非線形連立運動方程式を収束計算によって解くことにより、剛体の3次元運動の解析およびその検討を行った。

Key Words: rigid body, overturning, earthquake excitation, breadth-height-ratio, nonlinear equation, impact

1. はじめに

1995年の阪神大震災では死者の89%が家屋の倒壊や家具類の転倒による圧迫死や窒息死であったという報告がなされている¹⁾。また、地震時の構造物内部にある付帯設備の移動(転倒・散乱、落下など)による被害の大きさを考えると、構造物の内部空間に対する耐震は重要な課題である。災害軽減のための構造物の内部空間のあり方を追求し、その安全性を向上させるために、地震時の剛体運動に関する研究が過去多く行われてきた。剛体運動は、単純でよく知られている現象の一つであるが、非線形形の連立微分方程式であり繰り返しの収束計算を必要とすることや、衝突時に摩擦や跳ね返りの効果を考慮しなくてはならないこと等のため²⁾、解析が非常に複雑になる。この研究の歴史が約100年にもおよび、剛体が転倒する現象に関して様々な実験的・理論的な研究が行なわれている^{例えば3)~5)}のはこのためである。

しかし、それらの大半は対象となる問題空間を二次元平面として取り扱っている。本研究では問題空間を三次元へと拡張し、3次元非線形運動方程式を数値的に解くことによって剛体の3次元挙動解析を行った。

2. 3次元剛体運動のモデル化と定式化

本研究では、剛体運動を三次元へと拡張するが、既存

の2次元の研究³⁾と同様に剛体の運動は重心 (x,y,z) の変位と x 軸、 y 軸、 z 軸まわりのそれぞれの回転角 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ で表現することにする。

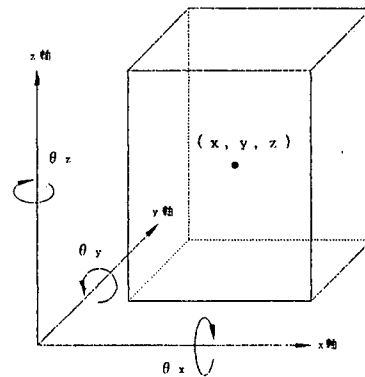


図-1 剛体のモデル

また、この剛体の運動も Ishiyama³⁾にならい、図-2のようにRest(静止)、Slide(滑っている状態)、Rotation(回転)、Slide Rotation(滑りながらの回転)、Translation Jump(平行移動のジャンプ)、Rotation Jump(回転しながらのジャンプ)の6つの運動モードに分類を行った。これら、剛体の6つのモードを推移させることによりすべての剛体の動きを表現することが可能となる。剛体の3次元運動方程式を解く際には、剛体を2次元平面に射影して運動を分析するとともに、剛体

の回転運動に順番をつけて解くことにより問題を取り扱
いやすくした。数値積分としては線形加速度法を用い、
逐次重心の加速度・速度・変位および回転角を求め、さ
らに幾何学的な関係からエッジの座標を求めた。

例えば **Rotation** に対しては、x、y、z 軸まわりの運動
方程式はそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_x &= \frac{1}{I_{xx}^2 + (z + \bar{z})^2} \times \left[\bar{r} \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \cos(\alpha_{xy} - |\theta_y|) - S_x(\bar{z} + \bar{g}) \right. \\ &\quad \left. \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \sin^2(\alpha_{xy} - |\theta_y|) + r_{yz}^2 \sin^2(\alpha_x - |\theta_x|) \cos(\alpha_{xyz} - |\theta_z|) \right] \\ \ddot{\theta}_y &= \frac{1}{I_{yy}^2 + (z + \bar{z})^2} \times \left[\bar{r} \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \cos(\alpha_{xy} - |\theta_y|) - S_y(\bar{z} + \bar{g}) \right. \\ &\quad \left. \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \sin^2(\alpha_{xy} - |\theta_y|) + r_{yz}^2 \sin^2(\alpha_x - |\theta_x|) \sin(\alpha_{xyz} - |\theta_z|) \right] \\ \ddot{\theta}_z &= \frac{1}{I_{zz}^2 + (z + \bar{z})^2} \times \left[\bar{r} \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \sin^2(\alpha_{xy} - |\theta_y|) + r_{yz}^2 \sin^2(\alpha_x - |\theta_x|) \cos(\alpha_{xyz} - |\theta_z|) \right. \\ &\quad \left. \cos(\alpha_{xyz} - |\theta_z|) - \bar{r} \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \sin^2(\alpha_{xy} - |\theta_y|) + r_{yz}^2 \sin^2(\alpha_x - |\theta_x|) \sin(\alpha_{xyz} - |\theta_z|) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

$$S_x = \begin{cases} \text{sgn}(\theta_x) & (\theta_x \neq 0) \\ \text{sgn}(\dot{\theta}_x) & (\theta_x = 0 \cap \dot{\theta}_x \neq 0) \\ \text{sgn}(\bar{r}) & (\theta_x = \dot{\theta}_x = 0) \end{cases} \quad S_y = \begin{cases} \text{sgn}(\theta_y) & (\theta_y \neq 0) \\ \text{sgn}(\dot{\theta}_y) & (\theta_y = 0 \cap \dot{\theta}_y \neq 0) \\ \text{sgn}(\bar{r}) & (\theta_y = \dot{\theta}_y = 0) \end{cases} \quad (2)$$

であり、 i_{gx} 、 i_{gy} 、 i_{gz} はそれぞれ単位質量あたりの重心をと
おる x、y、z 軸まわりの慣性モーメント、 r_{yz} は yz 平面に
射影した重心と剛体のエッジとの距離、 α_x は剛体のエッ
ジと yz 平面へ射影した重心とを結ぶラインと z 軸との
なす角、 α_{xy} は x 軸回りの回転を施した後の、剛体のエッ
ジと zx 平面へ射影した重心とを結ぶラインと z 軸との
なす角、 α_{xyz} は x 軸回り、y 軸回りの回転を施した後の、
剛体のエッジと xy 平面へ射影した重心とを結ぶライン
と z 軸とのなす角である。また、重心の位置は次式で表
わされるので

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \sin^2(\alpha_{xy} - |\theta_y|) + r_{yz}^2 \sin^2(\alpha_x - |\theta_x|) \sin(\alpha_{xyz} - |\theta_z|) \\ y &= \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \sin^2(\alpha_{xy} - |\theta_y|) + r_{yz}^2 \sin^2(\alpha_x - |\theta_x|) \cos(\alpha_{xyz} - |\theta_z|) \\ z &= \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \cos(\alpha_{xy} - |\theta_y|) \end{aligned} \quad (3)$$

重心の速度および加速度はこの重心の変位を時間 t で微
分することにより求めることができる。

Slide Rotation の場合は、式(1)に対応した回転角に関
する運動方程式と、次式のような重心に関する方程式を
得る。ただし、z 方向は **rotation** と同じである。

$$\ddot{x} = -\ddot{x} - S_x \mu_k (\bar{g} + \bar{z} + \bar{z}) \quad , \quad \ddot{y} = -\ddot{y} - S_y \mu_k (\bar{g} + \bar{z} + \bar{z}) \quad (4)$$

ここに、

$$S_x = \begin{cases} \text{sgn}(\dot{x}_0) & \dot{x}_0 \neq 0 \\ \text{sgn}(-\ddot{x}) & \dot{x}_0 = 0 \end{cases} \quad S_y = \begin{cases} \text{sgn}(\dot{y}_0) & \dot{y}_0 \neq 0 \\ \text{sgn}(-\ddot{y}) & \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

また、 μ_k は床と剛体の底面との間の動摩擦係数である。

3. 剛体の運動モードの推移と衝突

剛体運動は、床が震動したり何らかの外力が作用する
ことによって、上述の **Rotation** や **Slide Rotation** を含
む6つの運動モード間を推移する。表-1 は床との衝突現
象が無い場合に、ある運動モードが別の運動モードに推
移するための条件を表わしたものである。

剛体が **Jump**、**Rotation** そして **Slide Rotation** してい
る場合、エッジまたは底面が床と接触することで衝突が
生じる。この際、剛体は床から水平、鉛直双方の力積を
受けることになる。衝突後の値にダッシュをつけること
にすると、例えば **Jump** からの衝突に関しては運動量、
角運動量保存則から次式を得る。

$$\dot{x}' = \dot{x} + Q_x \quad \dot{y}' = \dot{y} + Q_y \quad \dot{z}' = \dot{z} + Q_z \quad (6)$$

$$(7)$$

$$\dot{\theta}'_x = \dot{\theta}_x + A_1 \times Q_y - A_2 \times Q_z \quad \dot{\theta}'_y = \dot{\theta}_y + B_1 \times Q_x - B_2 \times Q_z \quad \dot{\theta}'_z = \dot{\theta}_z + C_1 \times Q_x - C_2 \times Q_y$$

ここに、 Q_x 、 Q_y 、 Q_z は床から剛体に加わる単位質量あ
たりの x、y、z 方向の力積、 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 は
 θ_x 、 θ_y 、 θ_z 、 h 、 r_{yz} 、 α_x 、 α_{xy} 、 α_{xyz} および i_{gx} 、 i_{gy} 、 i_{gz}
の関数である。これより、力積 Q_x 、 Q_y 、 Q_z は跳ね返り係数 e_x 、 e_y 、 e_z
を用いて表わすことができる。例えば Q_z については

$$e_z = \frac{-(e_z + 1)\{\dot{z} - v'_{z_1} - v'_{z_2}\}}{1 - A_2 U \sin(\alpha_{xy} - |\theta_y|) + B_2 U \sin(\alpha_{xy} - |\theta_y|) + A_2 r_{yz} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_z}} \quad (8)$$

表-1 剛体運動の推移

現在の状態	推移条件	次の状態
Rest	$ \bar{x} > \mu_s(\bar{g} + \bar{z}) \cap \mu_s < \frac{h}{\bar{h}}$ または $ \bar{y} > \mu_s(\bar{g} + \bar{z}) \cap \mu_s < \frac{w}{\bar{h}}$	Slide
	$\frac{h}{\bar{h}} > \frac{\bar{g} + \bar{z}}{ \bar{x} } \cap \mu_s \geq \frac{ \bar{x} }{\bar{g} + \bar{z}} \cap \mu_s > \frac{h}{\bar{h}}$ または $\frac{h}{\bar{w}} > \frac{\bar{g} + \bar{z}}{ \bar{y} } \cap \mu_s \geq \frac{ \bar{y} }{\bar{g} + \bar{z}} \cap \mu_s > \frac{w}{\bar{h}}$	Rotation
	$\bar{z} + \bar{z} < -\bar{g}$	Translation Jump
Slide	$\dot{x} = 0 \cap \dot{y} = 0$	Rest
	$\bar{\mu}_k > \frac{h}{\bar{h}} \cap \bar{x} \neq 0$ または $\bar{\mu}_k > \frac{w}{\bar{h}} \cap \bar{y} \neq 0$	Slide Rotation
	$\bar{z} + \bar{z} < -\bar{g}$	Translation Jump
Rotation	$\begin{cases} \theta_x = 0 \\ \dot{\theta}_x = 0 \end{cases} \cap \begin{cases} \theta_y = 0 \\ \dot{\theta}_y = 0 \end{cases} \cap \dot{\theta}_z = 0$	Rest
	$ \bar{x} + \bar{x} > \bar{\mu}_k(\bar{g} + \bar{z} + \bar{z})$ または $ \bar{y} + \bar{y} > \bar{\mu}_k(\bar{g} + \bar{z} + \bar{z})$	Slide Rotation
	$\bar{z} + \bar{z} < -\bar{g}$	Rotation Jump
Slide Rotation	$ \bar{x} + \bar{x} < \bar{\mu}_k(\bar{g} + \bar{z} + \bar{z})$ かつ $ \bar{y} + \bar{y} < \bar{\mu}_k(\bar{g} + \bar{z} + \bar{z})$	Rotation
	$\begin{cases} \theta_x = 0 \\ \dot{\theta}_x = 0 \end{cases} \cap \begin{cases} \theta_y = 0 \\ \dot{\theta}_y = 0 \end{cases} \cap \dot{\theta}_z = 0$	Slide
	$\bar{z} + \bar{z} < -\bar{g}$	Rotation Jump
Translation Jump	$ \bar{p}_x > 0 \cup \bar{p}_y > 0 \cup \bar{p}_z > 0$	Rotation Jump
Rotation Jump	$\begin{cases} \theta_x = 0 \\ \dot{\theta}_x = 0 \end{cases} \cap \begin{cases} \theta_y = 0 \\ \dot{\theta}_y = 0 \end{cases} \cap \dot{\theta}_z = 0$	Translation Jump

ここに

$$v = \sqrt{h^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)} \quad \dot{v} = \text{sgn}(\theta_x) \times \frac{r_{yz}^2 \dot{\theta}_x \sin 2(\alpha_x - |\theta_x|)}{2 \times \sqrt{h^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)}} \quad (9)$$

$$v_z = \cos(\alpha_{xy} - |\theta_y|) \quad \dot{v}_z = -(\dot{\alpha}_{xy} - \text{sgn}(\theta_y) \times \dot{\theta}_y) \sin(\alpha_{xy} - |\theta_y|) \quad (10)$$

であり、 Q_z を適用した後のエッジのz方向の速度は次式のようになる。

$$\dot{z}_0 = \dot{z}' - (v \dot{v}_z + \dot{v} v_z) \quad (11)$$

この衝突後のエッジの速度によって次の運動の状態が決定される。 $\dot{z}_0 > 0$ ならば、剛体は **Rotation Jump** を続ける。 $\dot{z}_0 = 0$ ならば、 $\dot{x}_0 = 0 \cap \dot{y}_0 = 0$ のとき **Rotation** に移り、それ以外なら **Slide Rotation** に推移する。 $\dot{z}_0 < 0$ ならば、剛体は **Rotation** に推移し、剛体のエッジには次のステップでもさらに水平方向と鉛直方向の力積が加えられる。 $\dot{z}_0 < 0$ のとき、すなわち **Rotation** に推移した時、剛体のエッジへさらに加わる力積は、角運動量保存則より同様の手順を踏んで求めることができる。

次に、**Rotation** および **Slide Rotation** からの衝突は、 θ_x または θ_y が 0 になったときに生ずる。例えば、 $\theta_x = 0$ ($\theta_y \neq 0$) のときは、鉛直方向の力積 Q_z は底辺全体に加えられる。これを、一点に作用する等価な力積に置き換え、その作用点を辺の中心からの距離 ζ_w とすると、 ζ_w は

$$\zeta_w = -\text{sgn}(\theta_x) \times \frac{w}{2} \left\{ \frac{1+e_x}{1-e_x} \left(1 + \frac{i_{gx}^2}{w^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1+e_x}{1-e_x} \right)^2 \left(1 + \frac{i_{gx}^2}{w^2} \right)^2 - 4 \frac{i_{gx}^2}{w^2}} \right\} \quad (12)$$

となり、z, y 方向の力積 Q_z , Q_y は次式のようになる。

$$Q_z = -\frac{z}{1 + \frac{\zeta_w^2}{i_{gx}^2}} (1 + e_x) \left(1 - \frac{\zeta_w}{w} \right) \quad Q_y = -\frac{h \times \zeta_w}{i_{gx}^2 + h^2} Q_z \quad (13)$$

$\theta_y = 0$ ($\theta_x \neq 0$) の場合も同様である。衝突後の次の運動の状態は **Jump** の場合と同様に、求めた力積 Q_x , Q_y , Q_z を適用した後の剛体のエッジの速度によって決定される。衝突後の運動の推移をまとめたものを表-2、表-3 に示す。

4. 剛体挙動の3次元シミュレーション

本研究では、上述の一連の手順を基に剛体の3次元運動のアルゴリズムを構築し、これを用いて正弦波を入力した場合の剛体運動シミュレーションを行った。

(1) 水平1方向加振 (x方向)

振幅を 500gal と固定して振動数を 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0Hz と変化させた場合と、振動数を 1.0Hz に固定して振幅を 100, 250, 500, 750, 1000gal と変化させた場合のシミュレーションを行った。それぞれの結果を図-2 と図-3 の(a)~(e)に示す。ただし、幅、奥行き、高さはそれぞれ 10cm, 10cm, 30cm、床と底面、床とエッジの間の静止摩擦係数 μ_s 、 $\bar{\mu}_s$ はそれぞれ 0.4、動摩擦係数 μ_k 、 $\bar{\mu}_k$ はそれぞれ 0.3、単位質量あたりの Q_x , Q_y , Q_z はそれぞれ -1.0, -1.0, 0.5 を与えている。また、計算時間間隔は 0.001sec である。

振幅を固定させた場合、振動数を高くなるにつれて、短いステップ数で **Rest** から **Slide Rotation** 運動へ推移し、その後転倒したが 5Hz では転倒には至らなかった。これは、運動モードの遷移領域が 2Hz と 5Hz の間に存在し、それより高周波側では **Rotation** あるいは **Slide Rotation** 運動を続けるためである。振動数を固定させた場合も同様であり、始めの 100, 250gal では **Rest** を保つが、さらに振幅が大きくなると **Rotation** に推移し、その後転倒に至った。

(2) 水平2方向加振 (x, y方向)

振動数を 1Hz とし、x 方向、y 方向の振幅をそれぞれ 500gal, 250gal とした場合の結果が図-4(a)である。**Rotation** の開始条件である **West** の式を満たしているのは x 方向だけであるので、y 軸に平行な辺まわりの運動のみ生じている。(b)はで x, y 双方の振幅を 500gal とした場合である。原点にあるエッジを中心とした運動となっている。(c)は(b)の運動の途中で、 $\theta_x \neq 0$ かつ $\theta_y \neq 0$ の時に、強制的に x 方向の振幅を 2 倍にしたもので、z 軸回りの回転が生じていることがわかる。

(3) 3方向加振 (x, y, z方向)

正弦波を 3 方向へ入力することで剛体は **Rotation**, **Slide**, **Jump** など多彩な動きをする。また、これら正弦波の振幅の大きさを変えることでも様々な動きをする。

表-2 Jump からの衝突後の運動

		衝突時の条件		衝突後の運動
$\theta_x \neq 0$ $\cup \theta_y \neq 0$ $\cup \theta_z \neq 0$	$\dot{z}_0 > 0$			Rotation Jump
	$\dot{z}_0 = 0$	$\dot{x}_0 = 0 \cap \dot{y}_0 = 0$		Rotation
		else		Slide Rotation
	$\dot{z}_0 < 0$			Rotation
$\theta_x = 0$ $\cap \theta_y = 0$ $\cap \theta_z = 0$	$\dot{z}_0 > 0$	$\theta'_x = 0 \cap \theta'_y = 0$		Translation Jump
		else		Rotation Jump
	$\dot{z}_0 = 0$	$\dot{x}_0 = 0 \cap \dot{y}_0 = 0$		Rest
		else		Slide
	$\dot{z}_0 < 0$			Rotation

表-3 **Rotation**, **Slide Rotation** からの衝突後の運動

		衝突時の条件		衝突後の運動
$\dot{z}_0 \geq 0$	$\dot{x}_0 = 0 \cap \dot{y}_0 = 0$			Rotation
	else			Slide Rotation
$\dot{z}_0 < 0$				Rotation

図-5(a)は図-4(b)に z 成分が加わったもので、原点のエッジ部分に Jump や Slide の運動モードが現れている。(b)はそれぞれの方向の加振振動数を変えたとともに、y 方向に 1000gal という大振幅を入力したものであり、最終的に y 軸負方向に大きく移動して転倒に至っている。

5. まとめ

本研究では、地震時における剛体運動問題を 3次元へと拡張し、各運動モード間の推移条件や、剛体が床との衝突時に受ける力積を 3成分とも設定するとともに、非線形連立方程式を数値的に解いて剛体挙動のシミュレーションを行った。これにより、摩擦係数や跳ね返り係数などのパラメータを与えれば、現実に即した形での 3次元剛体のシミュレーションが可能となった。ただし、本研究で行ったような微分方程式の数値解析に基づく解法では、その定式化の複雑さゆえ、積み重ねた剛体などの

解析には限界があることは否めない。

参考文献

- 1) 日本建築学会建築計画委員会兵庫県南部地震調査研究部会：“阪神淡路大震災住宅内部被害調査報告書”，1996
- 2) Ishiyama, Y.: Review and discussion on overturning of bodies by earthquake motions, Building Research Institute, Ministry of Construction, 1980.
- 3) Chik-Sing Yim, et al: Rocking response of rigid blocks to earthquakes, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.8, pp.565-587, 1982.
- 4) Ishiyama, Y.: Motions of Rigid Bodies and criteria for overturning by earthquake excitation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.10, pp.635-650, 1982.
- 5) Winkler, T., K. Meguro and F. Yamazaki: Response of Rigid Body Assembles to Dynamic Excitation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.24, pp.1389-1408, 1995.

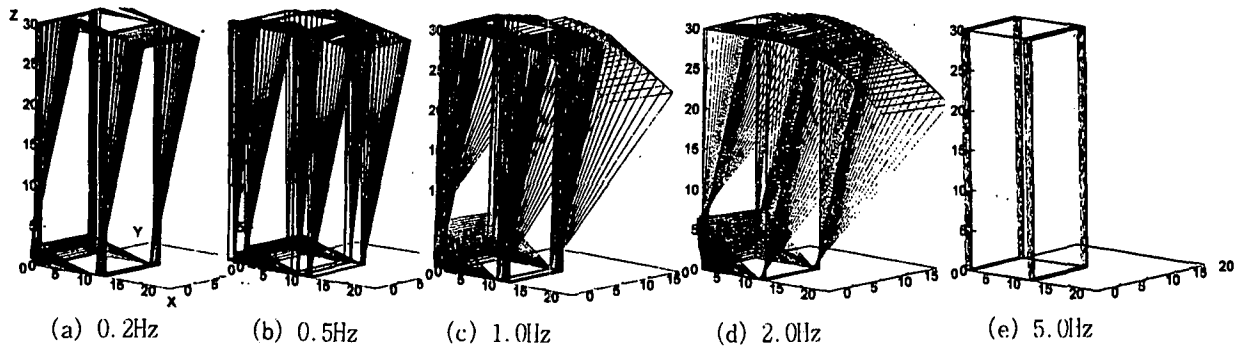


図-2 振動数 f を変化した場合の水平 1 方向加振 ($\ddot{x} = 500 \sin 2\pi ft$)

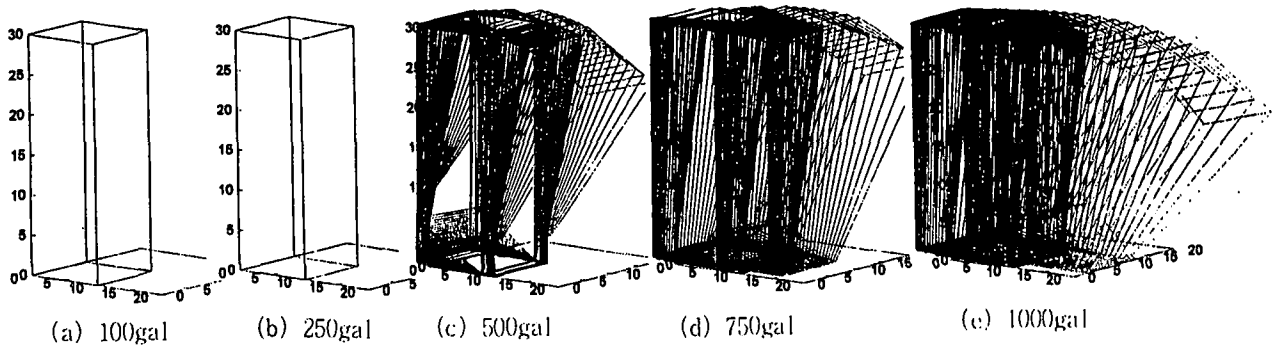


図-3 振幅 A を変化した場合の水平 1 方向加振 ($\ddot{x} = A \sin 2\pi t$)

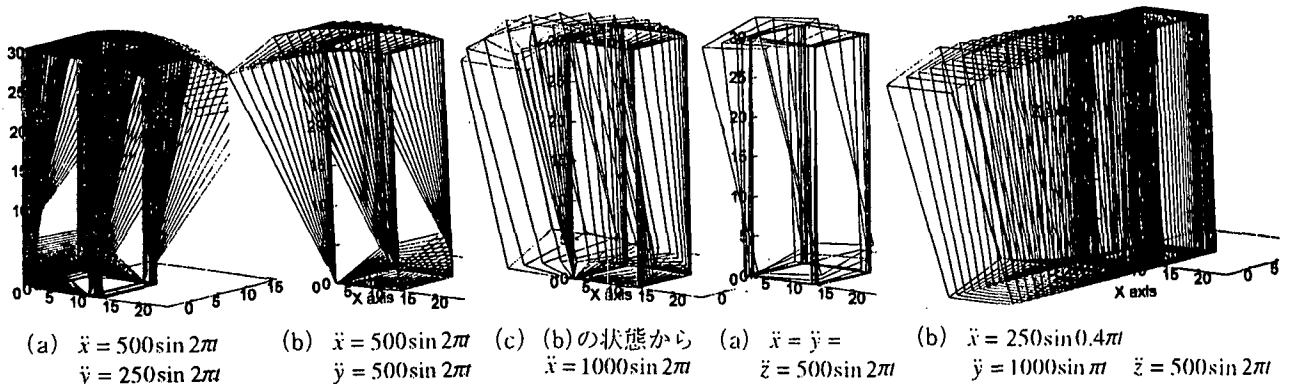


図-4 水平 2 方向加振 (x, y 方向)

図-5 3 方向加振 (x, y, z 方向)