

非定常スペクトル解析によって算定した地震動の

時間に依存する位相に関する基礎的研究

A fundamental study on time-varying phase of earthquake ground motion
by evolutionary spectrum analysis

藤原豪紀*, 中山隆弘**

Hidetoshi Fujiwara, Takahiro Nakayama

*工修 梶谷エンジニア株式会社中国支店 (〒730-0847 広島市中区舟入南 2-7-1)

**工博 広島工業大学教授 工学部建設工学科 (〒731-5193 広島市佐伯区三宅 2-1-1)

This paper presents properties of time-varying phase of a seismic motion derived from evolutionary spectrum analysis by means of complex demodulation. The changes of instantaneous frequencies introduced to time-varying phases are explained by using an example of sine wave with slightly different frequencies. Influences of time-varying phase on Fourier spectrum and response of filtered seismogram are also illustrated. Finally, it is suggested that the second order differences of envelopes of filtered seismograms may be associated with instantaneous frequencies.

Key Words: evolutionary spectrum, time-varying phase, complex envelope

キーワード: 非定常スペクトル, 時間位相, 解析信号

1. まえがき

本研究は、非定常スペクトル解析によって算定される地震動の時間に依存する位相（時間位相と呼ぶ）の基礎的な特性について検討することを目的としている。

非定常確率過程¹⁾では、ともに時間と円振動数の関数である非定常スペクトルと時間位相を定義できる。著者^{2), 3)}は、複素変調（CD）法を用いた非定常スペクトル解析法を提案し、併せて地震動の時間位相の算定法を示した。そこで用いたCD法は、狭帯域波の振幅および位相変調表現である単側帯波信号⁴⁾の振幅と位相を求める手法である。この振幅と位相はともに時間の関数であり、本論文では前者を包絡線と、後者を時変位相と呼ぶことにする。CD法による地震動の非定常スペクトル解析では、ある着目円振動数に対する非定常スペクトルと時間位相を、前述の包絡線と時変位相からそれぞれ算出している。しかし、時間位相は非定常確率過程に対して、時変位相は確定関数に対して定義した位相なので、本論文では両者を区別して呼んでいる。

さて、時間位相について、沢田ら⁵⁾は時間位相の円振動数に対する偏微分として群遅延時間を定義し、多点地震動の非定常な相互相関性を検討している。また時変位相については、Granger⁶⁾が二つの正弦波からなる波形を

モデルとして、時変位相に対する振幅の影響を考察している。Dziewonski and Hales⁷⁾は、マルチフィルタによって時変位相を求め、その時間微分である瞬時周波数⁸⁾（instantaneous frequency）が表面波の群速度に関係することを示している。Farnbach⁹⁾は、解析信号⁸⁾（analytic signalあるいはcomplex envelope）を用いた方法による包絡線と時変位相によって、波動の到達時間の検討を行っている。また、和泉、勝倉¹⁰⁾は、時変位相の瞬時周波数と、フーリエ位相の円振動数微分である群遅延時間を用いて、両位相の情報が地震動の非定常性と関係することを示している。さらにKatukura et al.¹¹⁾や和泉ら¹²⁾は、解析信号によって時間領域で振幅と位相を定義し、これとFFT解析を結びつけた対称的フーリエ解析法を提案している。

本論文では、まずPapoulis⁴⁾による狭帯域波（以下では単に帯域波と称する）に対する解析信号の変調による表現を用いて、CD法による帯域波の包絡線や時変位相と解析信号を用いた方法によるそれらの関係式をそれぞれ誘導し、両者の関係を両法による地震動の非定常スペクトルと時間位相の数値計算によって検証する。これにより、CD法による包絡線や時変位相についても、解析信号に基づく対称的フーリエ解析法の枠組みの中で議論することが可能になる。

次に地震動の帯域波の瞬時周波数を具体的に示す。瞬時周波数は、帯域波のある時刻における支配的な周波数成分を表しており、地震波の群遅延時間に関係すると考えられる。また、地震動帯域波の瞬時周波数が、帯域波のフーリエスペクトルや帯域波に対する線形1自由度系の応答に及ぼす影響を検討する。さらに地震動帯域波の包絡線と瞬時周波数の時間的変化の特性について述べる。両者の時間的変化の関連についてはFarnbachが断片的に言及しているが、これまでに十分な検討が行われていない。ここでは、Grangerによる二つの正弦波からなる波形モデルを用いて説明を試みる。

最後に、地震動帯域波の瞬時周波数と包絡線の2階差分の時間的変化が類似していることを示す。これは、非定常スペクトルと時間位相を用いた地震動のシミュレーション¹³⁾における非定常スペクトルと時間位相のモデル化を念頭においたものである。

2. 時間位相の数学的表現

2.1 CD法による非定常スペクトルと時間位相の算定

本節では、CD法による非定常スペクトル解析法について述べる。これは、解析信号を用いた方法との関係を示すために、文献2)で行った定式化をまとめ直したものである。

いま、非定常確率過程の標本関数 $x(t)$ が次式で表されたとする。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) dF(t, \omega) \quad (1)$$

ここで、 $dF(t, \omega)$ が複素関数であるとする、

$$dF(t, \omega) = |dF(t, \omega)| \exp\{i\phi(t, \omega)\} \quad (2)$$

のように極形式で表すことができる。このとき、式(1)を実部に関してまとめると、 $x(t)$ は式(3)のようになる。

$$x(t) = 2 \int_0^{\infty} \cos\{\omega t + \phi(t, \omega)\} |dF(t, \omega)| \quad (3)$$

上式における $\phi(t, \omega)$ を時間位相と定義する。時間位相は、 $dF(t, \omega)$ のそれぞれ実部 $dF_R(t, \omega)$ と虚部 $dF_I(t, \omega)$ を用いて次のように与えられる。

$$\phi(t, \omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{dF_I(t, \omega)}{dF_R(t, \omega)} \right\} \quad (4)$$

さて、 $x(t)$ は式(5)のように $n+1$ 個の積分の和と表すことができる。

$$x(t) = 2 \sum_{i=1}^n \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} \cos\{\omega t + \phi(t, \omega)\} |dF(t, \omega)| + 2 \int_{\omega_n}^{\infty} \cos\{\omega t + \phi(t, \omega)\} |dF(t, \omega)| \quad (5)$$

ただし、 $\omega_0=0$ である。第 $n+1$ 項の絶対値が十分小さいとすると、 $x(t)$ は n 個の積分の和によって近似表現できる。

式(5)の第 i 項の中心円振動数を $\omega_i = (\omega_i + \omega_{i-1})/2$ とし、第 i 番目の帯域幅 $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$ が十分に小さいとする。式(5)の第 i 項において、 ω の関数である被積分項の変化がゆるやかで、同項が近似的に ω_i の関数として与えられると仮定すると、第 i 項の積分は次のようになる。

$$x_i(t) \cong 2 |dF(t, \omega_i)| \cos\{\omega_i t + \phi(t, \omega_i)\} \quad (6)$$

式(6)に対する非定常スペクトルは次式で与えられる。

$$f(t, \omega_i) \Delta\omega_i = 2 |dF(t, \omega_i)|^2 \quad (7)$$

ところで、 $x_i(t)$ は $x(t)$ を狭帯域フィルターに通して得た出力であり、半帯域 $\Delta\omega_i/2$ 、すなわち、単側帯波信号として式(8)のように書ける⁴⁾。

$$x_i(t) = P(t) \cos\{\omega_i t + \phi(t)\} \quad (8)$$

ここで、 $P(t)$ と $\phi(t)$ はそれぞれ $x_i(t)$ の包絡線と時変位相である。

式(8)は式(6)と完全な対応関係をもつ。したがって、一つの確定関数 $x_i(t)$ に対する非定常スペクトルと時間位相は次のように与えられる。

$$f(t, \omega_i) = \frac{P(t)^2}{2\Delta\omega_i} \quad (9)$$

$$\phi(t, \omega_i) = \phi(t) + 2m_i\pi \quad (10)$$

ここで、 m_i は任意の整数である。

式(8)の包絡線と時変位相は、CD法によって次のように算定できる。すなわち、式(8)の両辺にそれぞれ $\cos\omega_i t$ と $\sin\omega_i t$ を掛けると、次式を得る。

$$x_i(t) \cos\omega_i t = \frac{1}{2} P(t) [\cos\phi(t) + \cos\{2\omega_i t + \phi(t)\}]$$

$$x_i(t) \sin\omega_i t = \frac{1}{2} P(t) [-\sin\phi(t) + \sin\{2\omega_i t + \phi(t)\}] \quad (11)$$

上式に低域通過処理 F を行い、 $2\omega_i$ 円振動数成分を除去し、それぞれ右辺第一項を取り出す。これらの結果を用いると、 $P(t)$ と $\phi(t)$ は次のように算定できる。

$$P(t) = 2 \sqrt{F\{x_i(t) \cos\omega_i t\}^2 + F\{x_i(t) \sin\omega_i t\}^2} \quad (12)$$

$$\phi(t) = -\tan^{-1} \left[\frac{F\{x_i(t) \sin\omega_i t\}}{F\{x_i(t) \cos\omega_i t\}} \right] \quad (13)$$

なお、 $\phi(t)$ は $-\pi \leq \phi(t) \leq \pi$ とし、 $F\{x_i(t) \sin\omega_i t\}$ と $-\sin\phi(t)$ が同符号になるようにとるものとする。

2.2 解析信号による帯域波の包絡線と時変位相の数学的表現

Papoulis⁴⁾によると、狭帯域フィルターの出力 $x_i(t)$ の解析信号 $\bar{x}_i(t)$ は、式(14)の極形式によって表すことがで

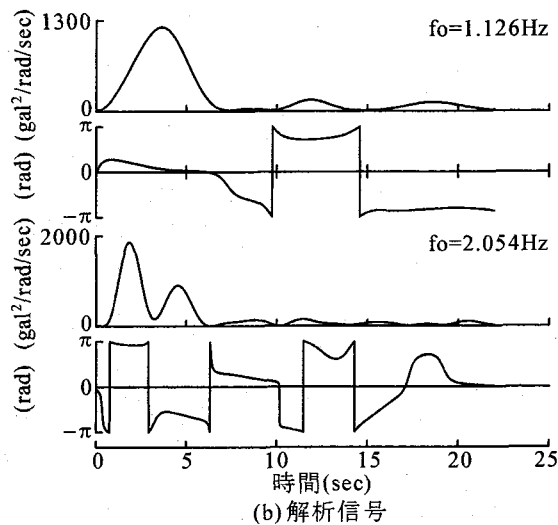
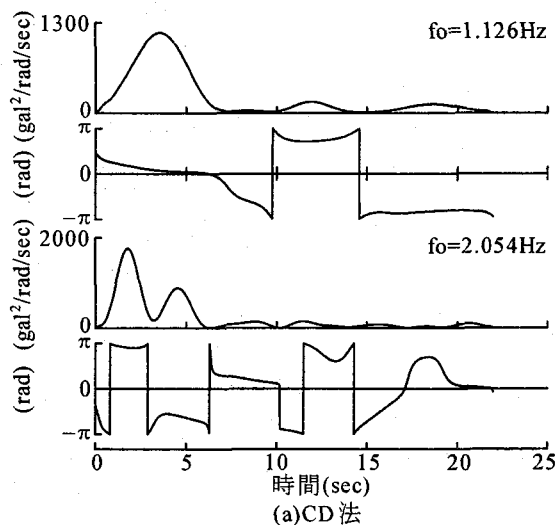


図-1 CD法と解析信号を用いた方法による非定常スペクトルと時間位相 (fo=1.126Hz and 2.054Hz)

きる。

$$\bar{x}_i(t) = x_i(t) + i\hat{x}_i(t) = |\bar{x}_i(t)| \exp\{i\zeta_i(t)\} \quad (14)$$

$$x_i(t) = |\bar{x}_i(t)| \cos \zeta_i(t) \quad (15)$$

$$\zeta_i(t) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\hat{x}_i(t)}{x_i(t)} \right\} \quad (16)$$

ここで、 $\hat{x}_i(t)$ は $x_i(t)$ のヒルベルト変換であり、 $\bar{x}_i(t) \leftrightarrow \bar{X}_i(\omega)$ ($\leftrightarrow$ はフーリエ変換の関係を表す) とする。

いま、 $\bar{y}_i(t) \leftrightarrow \bar{X}_i(\omega + \omega_0)$ とすると、 $\bar{x}_i(t)$ は、変調によって次のように表すことができる。

$$\bar{x}_i(t) = \bar{y}_i(t) \exp\{i\omega_0 t\} = \{y_i(t) + i\hat{y}_i(t)\} \exp\{i\omega_0 t\} \quad (17)$$

上式の実部をとると次式を得る。

$$\begin{aligned} x_i(t) &= y_i(t) \cos \omega_0 t - \hat{y}_i(t) \sin \omega_0 t \\ &= P(t) \cos\{\omega_0 t + \varphi(t)\} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $P(t) = |\bar{y}_i(t)|$ 、 $\varphi(t) = \tan^{-1}\{\hat{y}_i(t)/y_i(t)\}$ である。式(15)と式(18)から、次の関係が成立する。

$$P(t) = |\bar{x}_i(t)|, \quad \varphi(t) = \zeta_i(t) - \omega_0 t + 2m_2\pi \quad (19)$$

ただし、 m_2 は任意の整数である。

$|\bar{x}_i(t)|$ と $\zeta_i(t)$ は帯域波に関するものであるが、対称的フーリエ解析法^{11), 12)}では、時間領域で定義されたそれぞれ振幅と位相に相当している。また、式(18)から、式(12)と式(13)のそれぞれ右辺における二つの項は互いにヒルベルト変換の関係にあることがわかる。

2. 3 フーリエ級数による帯域波の包絡線と時変位相の数学的表現

式(8)の包絡線と時変位相に関するフーリエ級数式を与えよう。

$x_i(t)$ がフーリエ級数により近似的に次式で表されるとする。

$$x_i(t) = \sum_{k=-l}^l A_k \cos\{(\omega_0 + \Delta\omega k)t + \theta_k\} \quad (20)$$

ここで $\Delta\omega$ は円振動数間隔であり、 $\Delta\omega_i = (2l+1)\Delta\omega$ である。また、 A_k 、 θ_k はそれぞれ $(\omega_0 + \Delta\omega k)$ 円振動数成分の振幅と位相である。

式(8)と式(20)にそれぞれ CD 法を適用して包絡線と時変位相を求めると、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} P(t) &= \left[\left\{ \sum_{k=-l}^l A_k \cos(\Delta\omega k t + \theta_k) \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \sum_{k=-l}^l A_k \sin(\Delta\omega k t + \theta_k) \right\}^2 \right]^{0.5} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\sum_{k=-l}^l A_k \sin(\Delta\omega k t + \theta_k)}{\sum_{k=-l}^l A_k \cos(\Delta\omega k t + \theta_k)} \right\} \quad (22)$$

3. CD法と解析信号を用いた方法による非定常スペクトルと時間位相

本研究の数値計算は、Imperial valley 地震の El Centro における NS 成分記録、最大加速度 331.7gal、記録時間 22 秒、サンプリング時間間隔 $\Delta t = 0.01$ 秒を用いて行った。

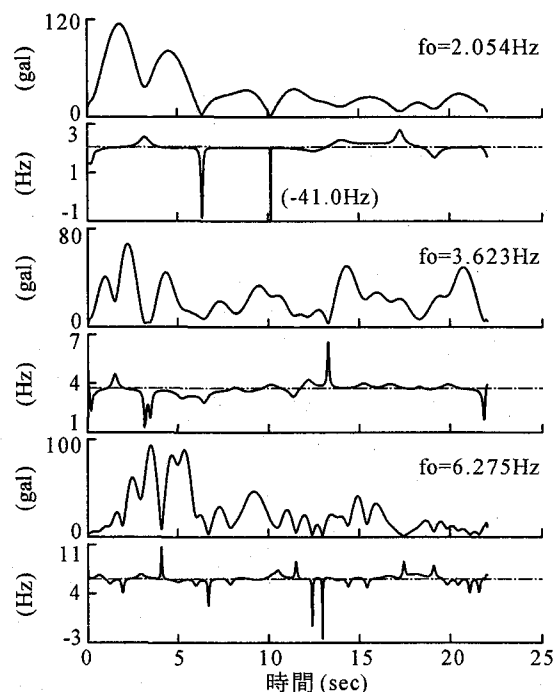
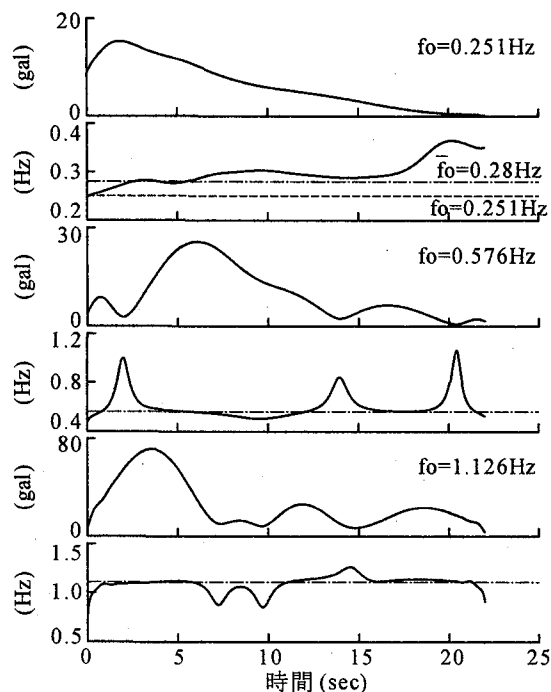
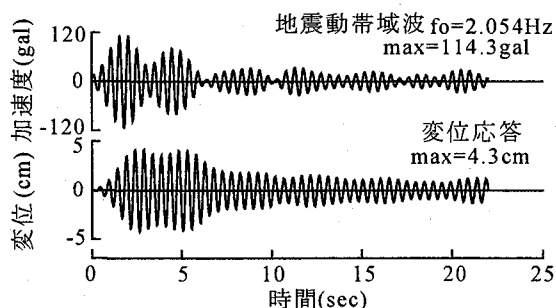
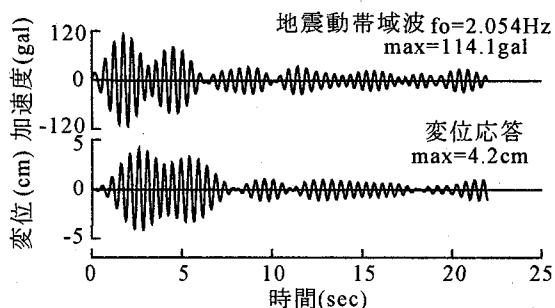


図-3 地震動帯域波の包絡線と瞬時周波数



(a) 非定常スペクトルと時間位相で帯域波を合成

(b) 非定常スペクトルと時間位相の初期値で合成

図-4 二つの地震動帯域波に対する応答波形(系の固有周波数2.054Hz, 減衰定数5%)

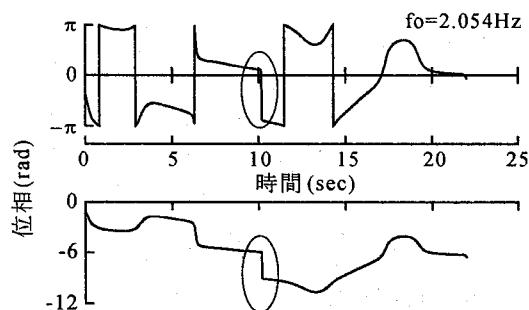


図-2 アンラップ操作により連続化した時間位相

図-1に両法によるEl Centro波の非定常スペクトルと時間位相を示す。着目周波数 f_0 は1.126Hzと2.054Hzである。CD法による非定常スペクトル解析は文献2)により、解析信号に基づく数値計算は、文献12)によった。両解析に用いたフィルターはOrmsbyのフィルターであり、各フィルターのパラメータは文献13)によった。両法による結果は、ほぼ完全に一致しており、前章の定式化を裏付けるものである。

さらに解析信号を用いた方法によって、CD法を用いる場合より簡単に非定常スペクトルと時間位相を算出できることがわかる。なお次章では、これまでの研究との関連から、非定常スペクトル解析にCD法を用いている。

ところで、対称的フーリエ解析法では、地震動の因果性を含めた対称性が議論されている。ここで用いたOrmsbyのフィルターは非因果であり、同フィルターによる出力は因果性を満足していない。同フィルターは、帯域幅が明確であり、位相遅れがないなどの理由から選定されている²⁾。しかし、これらの条件と因果性の両立は難しい。

4. 地震動帯域波の包絡線と瞬時周波数の時間的変化の特性

地震動の時間位相については、1章で述べたようにその時間的変化の特性がこれまで十分に検討されていない。特に、次節で示すように時間位相から算定した瞬時周波数は急変部や不連続部を有する場合があります、その解釈を困難な

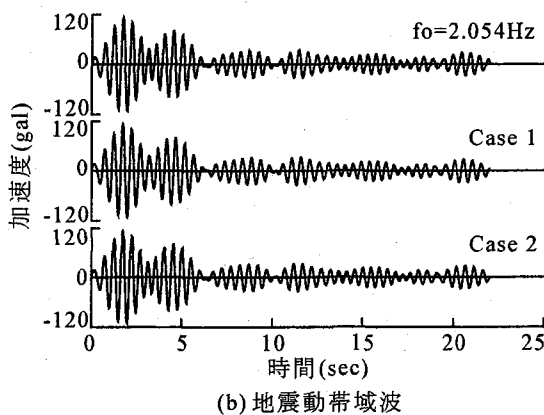
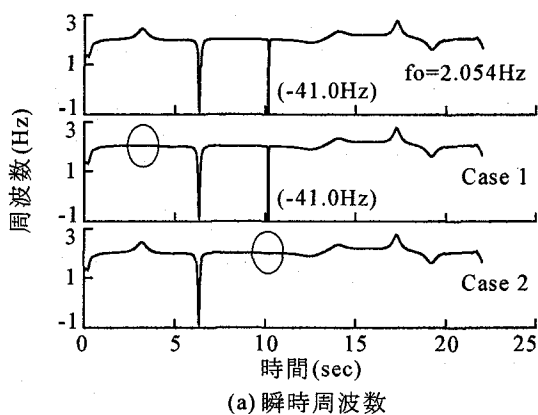


図-5 急変部を除去した瞬時周波数と非定常スペクトルを用いて合成した地震動帯域波

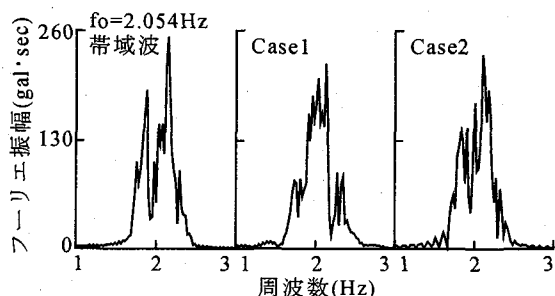


図-6 地震動帯域波(図-5)のフーリエスペクトル

ものになっている。このようなことから本章では、まず瞬時周波数の算定方法について述べ、さらに瞬時周波数のこのような時間的変化に対して説明を試みる。

前章で述べたように、非定常スペクトルと時間位相の算定にはCD法を用いた。CD法では、Ormsbyの帯域および低域フィルターを用い、文献13)に示されているパラメータを用いた。なお、非定常スペクトルについては振幅が二乗で強調されるので、式(9)により包絡線に変換して図示している。

4. 1 地震動帯域波の瞬時周波数

ここでは時間位相の特性を、時間位相の t に関する偏微分で定義された瞬時周波数 $f_0 + \partial\phi(t, \omega)/2\pi\partial t$ によって検討する。この瞬時周波数は、和泉、勝倉¹⁰⁾の $f_{gr}(t)$ に相当するものである。中心周波数 f_0 に対する瞬時周波数 $f_i(t)$ は次式から求めた。

$$f_i(t) = f_0 + \frac{\phi(t + \Delta t, 2\pi f_0) - \phi(t, 2\pi f_0)}{2\pi\Delta t} \quad (23)$$

さて、式(10)から明らかなように、時間位相には $2m\pi$ の不定がある。時間位相を連続関数にするためには、アンラップ操作¹⁴⁾が必要である。ここでは、時間位相の時間に関する差分の絶対値が $|\phi(t + \Delta t, 2\pi f_0) - \phi(t, 2\pi f_0)| \leq \pi$ となるように、同絶対値が π を超える場合に位相を操作した。アンラップ操作を行った時間位相の一例を図-2に示す。なお、図中の丸印部分については次節で述べる。

図-3に各地震動帯域波の包絡線と瞬時周波数を示す。瞬

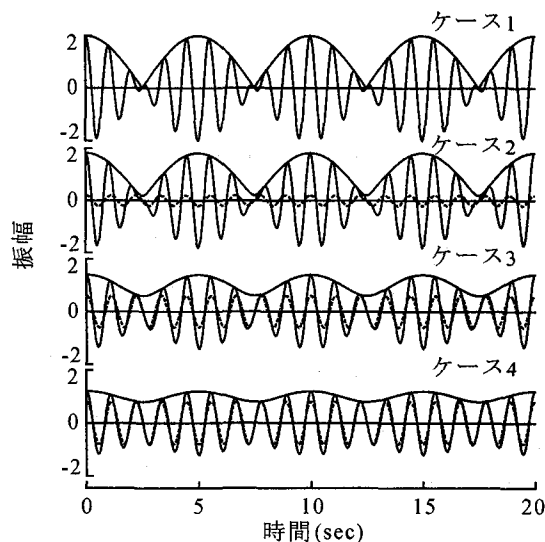
時周波数は、帯域波の時刻 t における支配的な周波数成分を表している。この周波数成分の重心となる周波数 $\bar{f}_0$ とフィルターの中心周波数 f_0 は必ずしも一致しない。図の $f_0 = 0.251\text{Hz}$ では、その一例として两周波数を図示している。なお図では、重心となる周波数を一点鎖線で示している。

ところで、包絡線が単峰的な変化を示す $f_0 = 0.251\text{Hz}$ を除いて、他の帯域波では瞬時周波数がいずれも包絡線の谷所で大きく変化し、それ以外の個所で変化がゆるやかであるという特徴を示している。

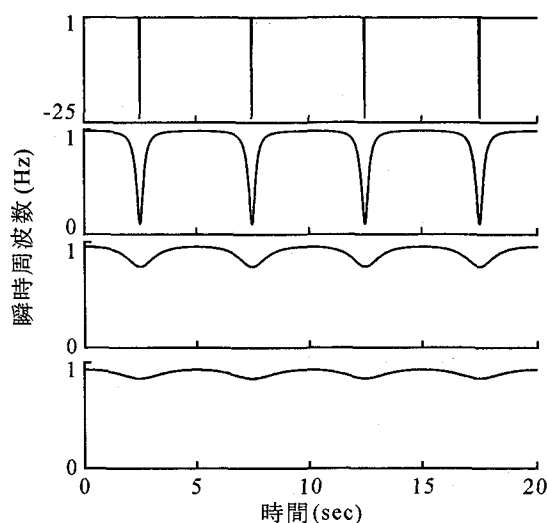
さらに、瞬時周波数について次のような検討を行った。すなわち、(a)非定常スペクトルと時間位相、(b)時間位相の $t=0$ での初期値に(a)と共通の非定常スペクトルを用いて二つの地震動帯域波を合成し、それらを入力動とした線形1自由度系の応答を調べた。これは、ケース(a)における瞬時周波数が応答に及ぼす影響を、位相の時間的変化を無視したケース(b)との比較により検討したものである。地震動帯域波は式(7)の関係をを用い、式(6)によって合成した。ここでは、中心周波数 $f_0 = 2.054\text{Hz}$ の非定常スペクトルと時間位相を用いた。また、線形1自由度系の固有周波数は 2.054Hz で、減衰定数は 5% とした。図-4には地震動帯域波と変位応答を示している。なお、図中の(a)と(b)は、二つの地震動帯域波のケースとそれぞれ対応している。

目視では、二つの地震動帯域波の差は非常に小さい。しかし、その変位応答は約4秒以降で明らかな差を生じている。特にケース(b)ではすべての時刻で応答が増幅され、共振している。一方、ケース(a)の谷に該当する時刻では応答が増幅されておらず、入力波形の支配的な周波数成分がこれらの時刻で変化していることを示している。なお、二つの地震動帯域波に対する加速度応答と速度応答が変位応答と同様な結果を示したことを付け加えておく。

次に、瞬時周波数の急変部がフーリエスペクトルにどのように関与するのか検討した。図-5の丸部の周波数変化を除去した瞬時周波数から時間位相を式(23)で作成し、非定常スペクトルを用いて地震動帯域波 ($f_0 = 2.054\text{Hz}$) を合成した。Case 1 では強震部との関連をみるため、 $2.03 \sim 3.97$ 秒の 1.94 秒間の瞬時周波数を 2.047Hz の一定値にした。Case 2 では、 $10.08 \sim 10.24$ 秒の 0.16 秒間の瞬時周波数を



(a) 波形や波形の包絡線(実線), 式(25) 第二項(破線)



(b) 瞬時周波数

図-7 二つの正弦波からなる波形の包絡線と瞬時周波数($f_0=1.0\text{Hz}$, $\varepsilon=0.1\text{Hz}$)

表-1 各ケースの振幅とその比

ケース	振幅 A_{-1}	振幅 A_1	振幅比 $2A_1:(A_{-1}-A_1)$
1	1.0	1.0	—
2	1.0	0.8	1.6:0.2
3	1.0	0.4	0.8:0.6
4	1.0	0.2	0.4:0.8

2.0Hzにし、10.16秒にある瞬時周波数のピークを除去した。図-5には、非常数スペクトルと時間位相から合成した帯域波と両ケースの帯域波を示している。両ケースではそれぞれの時刻で波形が変化しているが、その変化は非常に小さく、局所的である。

図-6には、それぞれの地震動帯域波(図-5)のフーリエスペクトルを示している。Case 1では、約1.80~2.17Hzのスペクトルの形状が大きく変化している。帯域波の強震部がスペクトルの卓越部分と関係していることがわかる。一方、Case 2では、スペクトルの全体的な形状はおおよそ帯域波のそれと類似しているが、操作した2.0Hzの前後でスペクトルが大きく変化している。スペクトルの変化は、波形の変化に比較すると、いずれも大きいものとなっている。

以上のように、瞬時周波数を用いて合成した地震動帯域波のスペクトルや帯域波に対する線形1自由度系の応答では、瞬時周波数の及ぼす影響が必ずしも無視できないことがわかる。

4. 2 二つの正弦波から構成された波形の包絡線と瞬時周波数

式(21)と式(22)から、フーリエ振幅と位相は、包絡線と時変位相にそれぞれ関係することがわかる。ここでは、包絡線と瞬時周波数の変化の関係がどのようになるのか、次の

周波数がわずかに異なる二つの正弦波からなる波形⁹⁾について検討する。これは、式(20)において二つの円振動数成分から構成される場合の波形に相当し、帯域フィルターの帯域幅をもっとも狭くして得た帯域波と考えられる。

$$y(t) = A_{-1}\cos\{2\pi(f_0 - \varepsilon)t + \theta_{-1}\} + A_1\cos\{2\pi(f_0 + \varepsilon)t + \theta_1\} \quad (24)$$

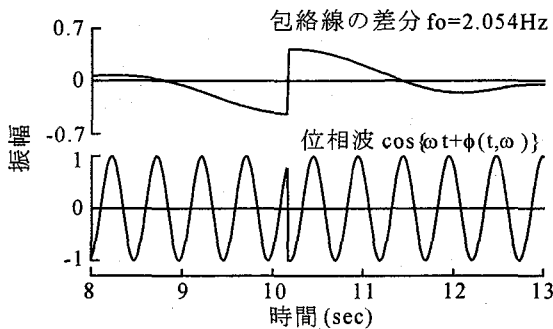
ここで、 $\varepsilon(\geq 0)$ は f_0 に比べて十分小さいとする。いま、 $A_{-1} \geq A_1$ とすると、式(24)は次のように変形できる。

$$y(t) = 2A_1\cos\left\{2\pi\left(\frac{\theta_1 - \theta_{-1}}{2}\right)t + \frac{\theta_{-1} + \theta_1}{2}\right\} \cos\left\{2\pi f_0 t + \frac{\theta_{-1} - \theta_1}{2}\right\} + (A_{-1} - A_1)\cos\{2\pi(f_0 - \varepsilon)t + \theta_{-1}\} \quad (25)$$

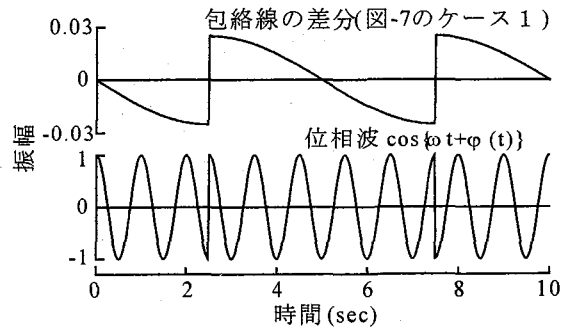
第一項は中心周波数の成分を、第二項は中心周波数以外の成分を表している。式(25)の包絡線と時変位相は、式(21)と式(22)で $t=1$, $A_0=0$ とすれば与えられる。なお、時変位相の瞬時周波数は、式(23)において $\phi(t, 2\pi f_0)$ の代わりに $\varphi(t)$ を用いることにより定義する。

図-7に、 $f_0=1\text{Hz}$, $\varepsilon=0.1\text{Hz}$, $\theta_{-1}=\theta_1=0$ で、各正弦波の振幅を変化させた4ケース(表-1)の波形や包絡線、瞬時周波数(いずれも実線)を示す。図には式(25)の右辺第二項を破線で示している。表-1には、式(25)の右辺第一項と第二項の振幅比も示している。

図-7から、いずれのケースでも帯域波の谷部では、第二項の振幅が帯域波の振幅と同程度の大きさになっていることがわかる。さらにこれらの時刻では、帯域波と第二項の位相の差はケース1が一番大きく、ケース4になるほど両者の差が小さくなっている。波形の包絡線と瞬時周波数は、これら第一項と第二項の振幅比に関連して様相が変化している。ケース1では包絡線の起伏が大きく、ケース4になるほどその変化がなだらかになっている。瞬時周波数については、包絡線の谷部で不連続な変化を示し、谷部以外では中心周波数 $f_0=1\text{Hz}$ に一致している(ケース1)。ケース4になるほど、谷部での瞬時周波数の変化がゆるやかにな



(a) 地震動帯域波の包絡線の差分と位相波



(b) 図-7 に示したケース 1 の包絡線の差分と位相波

図-8 瞬時周波数の不連続点での包絡線の差分と位相波

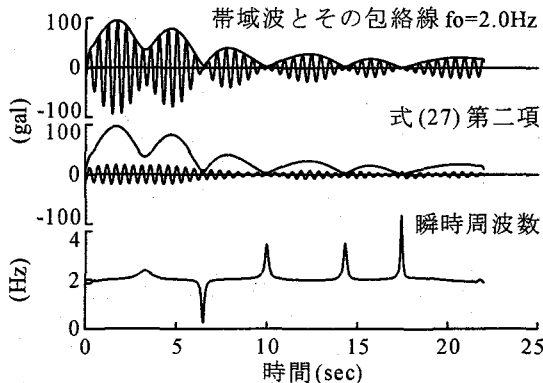


図-9 地震動帯域波の包絡線と瞬時周波数

り、また瞬時周波数の変化の範囲が広がっている。なお、第二項の周波数は第一項の周波数よりも小さいので、いずれのケースにおいても瞬時周波数は谷部で下に凸な変化を示している。また、ケース 4 になるほど第二項が卓越し(表-1)、谷部以外の瞬時周波数が中心周波数(1.0Hz)より小さくなっている。

さて、図-2 の丸印部分、すなわち $f_0=2.054\text{Hz}$ の時刻約 10 秒では時間位相が急変している。図-3 を見ると、この時間位相の急変部で瞬時周波数が不連続な変化をしている。同様の例は、たとえば同図の $f_0=6.275\text{Hz}$ の時刻約 13 秒にも見られる。

図-8 には、 $f_0=2.054\text{Hz}$ の時間位相だけで合成した位相波を、図-7 のケース 1 の位相波と比較して示している。図には、次式による帯域波の包絡線の差分も併せて示している。

$$\Delta P(t) = P(t + \Delta t) - P(t) \quad (26)$$

地震動帯域波の包絡線の差分、位相波のいずれも、図-7 のケース 1 のそれらと同様の変化をしている。この結果は、時間位相ではこのような急変部が存在していることを示している。また、そこでは包絡線の差分も不連続になっている。

以上のように正弦波の例では、中心周波数以外の成分である第二項が包絡線や瞬時周波数の時間的变化に関与していることがわかった。ところで、式(20)の地震動帯域波に対しても、式(25)と同様の定式化が可能である。

$$x_i(t) = 2 \sum_{k=0}^l B_k \cos \left\{ \Delta \omega_k t + \frac{\theta_k - \theta_{-k}}{2} \right\} \cdot \cos \left\{ \omega_{0i} t + \frac{\theta_{-k} + \theta_k}{2} \right\} + \sum_{k=1}^l |A_{-k} - A_k| \cos \{ (\omega_{0i} \pm \Delta \omega_k) t + \xi_k \} \quad (27)$$

ここで、 B_k は A_{-k} と A_k のいずれか小さい方の値を、 ξ_k は A_{-k} と A_k のいずれか大きい値に対応する θ を示している。また第二項の符号は、 $A_{-k} \geq A_k$ のときにマイナスと、 $A_{-k} < A_k$ のときにプラスとする。

式(27)の第一項における各項の中心円振動数は ω_{0i} であるが、第一項の各項を重ね合わせた合成波では、円振動数成分はもはや ω_{0i} とはならない。したがって式(27)は、前述の例のように中心周波数とそれ以外の周波数成分という構成にはなっていない。しかし、帯域波に対する第二項の影響は、図-7 における例と同様のものである(図-9)。

このように地震動帯域波では、瞬時周波数に対してフーリエ振幅や位相が複雑に関係している。しかし、図-3 を見るとこれまで述べたように、包絡線と瞬時周波数において図-7 と同様の変化の様相が見て取れる。たとえば、図-3 の $f_0=2.054\text{Hz}$ では、時刻約 3 秒の包絡線や瞬時周波数の変化がケース 3 に、時刻約 6 秒の変化がケース 2 にほぼ相当しているようである。

4. 3 地震動帯域波の包絡線の 2 階差分と瞬時周波数の時間的变化の比較

式(18)からわかるように、地震動帯域波の包絡線と時変位相は独立ではなく、両者は、互いにヒルベルト変換の関係にある解析信号の実部と虚部から構成されている。包絡線と時変位相の関係は、周波数領域におけるフーリエ振幅と位相の關係に相当する。和泉ら¹²⁾は、対称的フーリエ解析法の中で時間・周波数両領域におけるこれらの関係を示している。ところで、地震動帯域波の包絡線が最小位相推移関数である場合、時変位相は包絡線から導出できる¹⁵⁾。

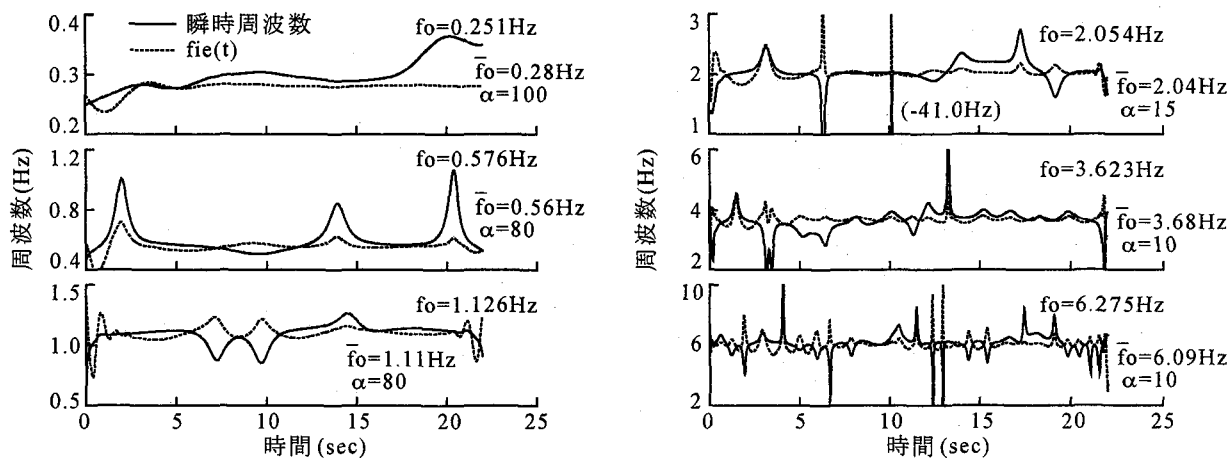


図-10 $fie(t)$ と瞬時周波数の比較

しかし、一般に帯域波の包絡線が最小位相推移関数とは限らない。ここでは包絡線の差分を用いて、地震動帯域波の包絡線と時間位相の関連性を調べた。

図-10 には地震動帯域波の包絡線の 2 階差分と瞬時周波数を比較している。ただし、包絡線の 2 階差分は次式の $fie(t)$ で与えている。

$$fie(t) = \bar{f}_0 + \alpha \Delta^2 P(t) \quad (28)$$

ここで、 α は任意の実数を、 $\Delta^2 P(t)$ は包絡線の 2 階の差分を表している。図中には α の値を示している。 α は、包絡線の 2 階差分の時間的変化を $\bar{f}_0$ に対して拡大・縮小する役割を果たしている。なお、各帯域波に対する α の値は試行錯誤的に決定した。

瞬時周波数の急変部では、 $fie(t)$ は上に凸の変化を示しているが、その時間的変化の様相は瞬時周波数と比較的よく類似していることがわかる。ただし、地震動帯域波の包絡線から瞬時周波数を導出するためには、たとえば、強震部の包絡線の 2 階差分と減衰部におけるそれらのオーダーの差をどう処理するのか、帯域波の周波数の平均値や標準偏差に応じて、2 階差分の変化の様相をどのように操作するのかなど、多くの課題がある。

5. まとめ

本研究では、CD 法による包絡線や時変位相と、解析信号による方法を用いたそれらとの関係を整理し、両法による非定常スペクトルと時間位相が一致することを示した。次に、CD 法によって求めた地震動帯域波の包絡線と瞬時周波数を示し、これらの基礎的特性について検討した。得られた結果をまとめると以下ようになる。

(1) 非定常スペクトルと瞬時周波数から合成した地震動帯域波では、瞬時周波数における急変部の有無による差は小さい。しかし、帯域波のフーリエスペクトルや帯域波に対する線形 1 自由度系の応答では、必ずしも無視できない差を生じる。

(2) 地震動帯域波の瞬時周波数は、包絡線が多峰的な変化をする場合、いずれも包絡線の谷部で大きく変化し、それ以外の個所ではゆるやかな変化をしている。

(3) 地震動帯域波の瞬時周波数の時間的変化は、周波数がわずかに異なる二つの正弦波からなる波形のそれらとよく類似する。正弦波の例では、瞬時周波数の時間的変化が帯域波における中心周波数以外の成分の影響によって説明できた。

(4) 地震動帯域波の包絡線の 2 階差分と瞬時周波数を比較し、両者が類似する時間的変化の様相を示すことを指摘した。

(5) 包絡線の差分の不連続な変動や瞬時周波数の時間的変化の物理的意味、さらには包絡線の 2 階差分と瞬時周波数の時間的変化の関係をどのように地震動のシミュレーションに用いるかは今後の課題である。

参考文献

- 1) Priestley, M.B.: Evolutionary spectra and non-stationary processes, *Journal of Royal Statistical Society*, Vol.27, pp.204-237, 1965.
- 2) 小松定夫, 藤原豪紀, 中山隆弘: コンプレックス・デモデュレーション法による地震動の非定常スペクトル解析: 土木学会論文集, 第 368 号/1-5, pp.311~318, 1986.
- 3) Nakayama, T. and Fujiwara, H.: A simulation method of earthquake ground motion in consideration of time-varying phase based on nonstationary spectrum theory, *Proc. of ICOSSAR '97*, Vol.2, pp.699-707, 1997.
- 4) Papoulis, A. (町田東一, 村田忠夫訳監修): アナログとデジタルの信号解析, 現代工学社, 4 章, 1982.
- 5) 沢田勉, 亀田弘行, 青井英幸: 多点地震動の非定常相互スペクトルの振幅特性と位相特性に関する考察, 構造工学論文集, Vol.36A, pp.733~746, 1990.
- 6) Granger, C.W.J.: *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton Univ. Press, Chapt.9, 10, 12, 1964.

- 7) Dziewonski, A.M. and Hales, A.L.: Numerical Analysis of Dispersed Seismic Waves, *Method in Computational Physics*, Academic Press, 1972.
- 8) Hsu, H.P. (佐藤平八訳): フーリエ解析, 森北出版, 7章, 9章, 1979.
- 9) Farnbach, J. S.: The complex envelope in seismic signal analysis, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.65, No.4, pp.951-962, 1975.
- 10) 和泉正哲, 勝倉裕: 地震動の位相情報に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集, 第 327 号, pp.20~28, 1983.
- 11) Katukura, H., Ohno, S. and Izumi, M.: Symmetrical FFT technique and its applications to earthquake engineering, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.18, pp.717-725, 1989.
- 12) 理論地震動研究会: 地震動 その合成と波形処理, 鹿島出版会, 4章, 6章, 7章, 1994.
- 13) 藤原豪紀, 中山隆弘: 位相の非定常性を考慮した地震動シミュレーション法の開発, 土木学会論文集, 第 661 号/I-53, pp.119~132, 2000.
- 14) 佐藤忠信, 土岐憲三, 森口康弘: 地震動に含まれる位相特性のモデル化, 京都大学防災研究所年報, 第 32 号 B-2 別刷, 1989.
- 15) 和泉正哲, 勝倉裕, 大野晋: 超関数理論に基づく FFT 手法を用いた地震動の分離と合成に関する理論的考察, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 390 号, pp.18~26, 1988.

(2000 年 9 月 14 日 受付)