

Wigner 分布で表される時間周波数特性を有する地震動波形の合成手法について

京都大学防災研究所 正員 本田 利器

1. はじめに

地震動は非定常性を有する時系列信号であり、その周波数成分の時間的变化は非常に重要な情報である。

近年耐震設計等において重要性が認識されている非線形動的解析で用いる入力地震動の設定においても、地震動の周波数特性の時間変化を考慮することは不可欠である。

地震動波形等の時系列信号の時間的に変化する周波数特性を検討する手段としては短時間フーリエ変換 (STFT) をはじめ種々の方法がある。例えば STFT は、信号の短い時間区間を切り出し、そのフーリエ変換を抽出するものである。STFT は解釈が容易な結果を与えることが多く、検出の問題に対する実用性は高いと考えられるが、周辺条件を満たさないなど数学的には好ましくない条件も有し、逆変換ができないなど波形作成には不適な面がある。

そこで、STFT 等よりも解像度が高く、数学的にも好ましい特性を有する Wigner 分布を用いて時間周波数特性を規定し、これに基づく波形作成手法について検討する。

2. Wigner 分布

時系列信号 $s(t)$ の Wigner 分布は、

$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int \hat{s}^*(\omega - \frac{1}{2}\theta) \hat{s}(\omega + \frac{1}{2}\theta) e^{-i\omega\tau} d\tau \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ここで $\hat{s}$ はフーリエ変換を表す。

Wigner 分布は、解像度が高く、また、時間-周波数空間上での周辺条件を満たすなどの好ましい特性を有する一方で、クロス項などと呼ばれる異なる周波数成分同士の干渉により生じる「ノイズ」のために利用が難しい面もある。そのひとつが逆合成である。

なんらかの信号の分布として可能な Wigner 分布は限られており、その時間周波数関係が「矛盾」を有している場合、対応する信号は存在しない、すなわち、逆合成は不可能になる。逆合成が可能な分布は表現可能であると言われる。しかし、クロス項を含め、矛盾の無いように時間周波数特性を設定することは特殊な場合を除き不可能である。

3. 表現可能な Wigner 分布の空間の正規直交基底

ここでは、ウェーブレットを用いることにより、表現可能な Wigner 分布のみからなるを構成する空間の正規直交基底を構成できることを示す。対象とする時系列信号は $s(t) \in L^2(R)$ とし、用いるウェーブレットは正規直交性を有するものとする。

いま、二つの Wigner 分布 ($W_1(t, \omega), W_2(t, \omega)$ とする) の内積を

$$\langle W_1(t, \omega), W_2(t, \omega) \rangle = \int W_1(t, \omega) W_2(t, \omega) dt d\omega \dots\dots\dots (2)$$

と時間領域及び周波数領域の両者において積分することにより定義する。これに Moyal の公式¹⁾を適用すると、ウェーブレットの正規直交性よりウェーブレット関数の Wigner 分布同士の直交性が示される。すなわち、アナライジングウェーブレット $\psi(t)$ を用いて $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ (j, k は整数) と表される関数の Wigner 分布を $W_{jk}(t, \omega)$ として次式が成立する。

$$\langle W_{jk}, W_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km} \dots\dots\dots (3)$$

スケール j を無限大まで考慮することでウェーブレットを用いた合成で表現される信号の集合が $L^2(R)$ に一致することを考慮すると、 W_{jk} を基底に持つ空間は表現可能な Wigner 分布の集合に一致することがわかる。

したがって、任意の Wigner 分布 $W(t, \omega)$ に対して

$$W_p(t, \omega) = \sum_{j,k} \langle W(t, \omega), W_{jk} \rangle W_{jk} \dots\dots\dots (4)$$

として表現可能な Wigner 分布の空間への射影を考えることができる。これは、与えられた分布に最も「近い」表現可能な分布であると考えられる。なお、式 (3) の内積で与えられるのはウェーブレット係数であるから、そのウェーブレット逆変換により時間周波数特性 $W_p(t, \omega)$ を有する時系列信号を得ることができる。

4. 解析例

離散化信号を対象に上記の手法を適用した例を示す。対象とする元信号として、ウェーブレット関数 $\psi_{jk}(t)$ において $j = 4, k = 7$ としたもの（サンプリング 0.01 秒，データ個数 128）を考える。ウェーブレット関数は、Meyer の構成法に基づく佐々木ら²⁾によるものを用いた。元信号の Wigner 分布を図-1 に、波形を図-3（点線）に示す。

元信号と j, k を様々に変化させたウェーブレット関数の Wigner 分布の内積をプロットすると図-2 のようになる。これより、該当するウェーブレット係数のみの値が 1 になりその他の係数の値は 0 になるという結果をよく再現できていることが分かる。

このように与えられたウェーブレット係数を用いて時系列信号を合成したものを元信号とともに図-3 に示す。同図より、上記の方法により合成された信号は、元信号をほぼ再現できていることが分かる。

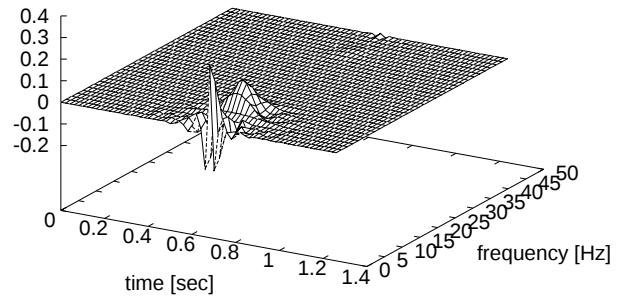


図-1 ウェーブレット $\psi_{jk}(t)$, ($j = 4, k = 7$) の Wigner 分布

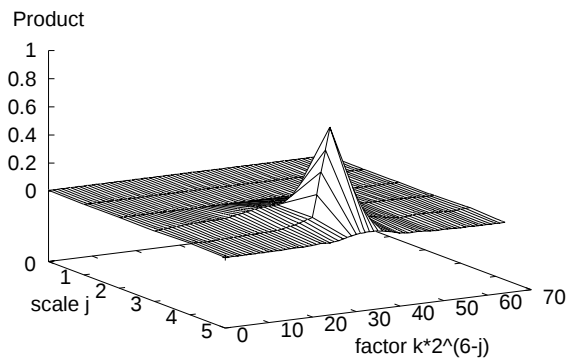


図-2 ウェーブレット $\psi_{jk}(t)$ の Wigner 分布と元波形の Wigner 分布の内積

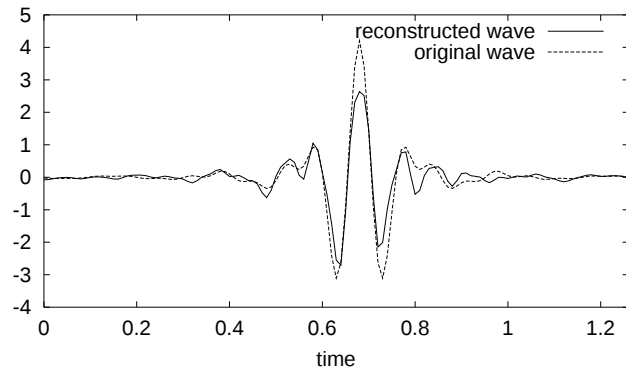


図-3 元波形とその Wigner 分布から提案する手法により算出された時刻歴波形

5. おわりに

時間周波数特性を Wigner 分布で規定して地震動波形を作成するための手法について検討した。表現可能な Wigner 分布の空間の正規直交基底をウェーブレットを用いて構成することが可能であることを示した。また、この基底を用いると、任意に与えられる Wigner 分布を表現可能な Wigner 分布へ射影し、これに基づき地震動波形を合成することが可能であることを示し、例を用いてその有効性を示した。

参考文献

- 1) J. E. Moyal : Quantum Mechanics as a statistical theory, Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Vol.45, pp.99-124, 1979
- 2) 佐々木, 前田, 山田 : ウェーブレット変換を用いた時系列データの解析, 構造工学論文集, Vol.38B, pp.9-20, 1992