土木学会第50回年次学術講演会（平成7年9月）

I －821

マルコフ連鎖を用いた構造物の地震応答解析

筑波大学 学生員 杉山 毅
筑波大学 正員　 西岡 隆

1. はじめに

激震時の構造物の安全性は、その塑性変形も考慮した解析のもとに考えられる。非線形の運動方程式で表されるこのような問題は、実地震動や模擬地震動などを用い数値解析的に考えることも可能である。しかし本来の解析の目的は、地震動と応答がどのように対応するかを明らかにすることである。地震の発生機構は未だ解明に至っておらず、それらの確率論的な特性を確定的な入力波に反映した後に、統計的に応答解析を行なう方法は、各特性のパラメータと応答との対応関係という問題の焦点をぼかしかねない。

これに対し、地震動の確率論的特性を直接パラメータとし、ランダム振動理論を通じて解析を行なう方法が提案されている。確率密度関数を支配する Fokker-Planck 方程式を展開しての一連の方法などがそれに当たる[1)]。

本研究は後者に関連して、ランダムな外力に対しての構造物の入力エネルギー値とその推移を離散量でモデル化し、マルコフ連鎖を用いた確率論的な解析を行なった。これにより、入力される地震動の確率論的特性と構造物の応答特性とが直接対応づけられ、塑性化などの非線形応答をともなう構造物の安全性を検討できると考える。今回はこのような考えの妥当性を検証すべく、主に線形系の応答を対象に解析を行ない、非線形系への拡張の考え方を提示する。

2. マルコフ連鎖の諸法則

マルコフ連鎖の定義式は確率変数 X に対し、

$$\begin{aligned}&\mathrm{prob}(X_{n+1}=k|X_0=h,\ldots,X_n=j)\\&\quad=\mathrm{prob}(X_{n+1}=k|X_n=j)\qquad\cdots\cdots\cdots (1)\end{aligned}$$

となる。ここで X の添字は離散時間を示している。この式は、与えられた確率変数のある時刻の次の状態が、現在の時刻のみに関係しそれ以前の状態によらないということを示している。(1) 式は通常推移確率 p_{jk} と呼ばれる。

この推移確率を推移前の状態をマトリクスの行に、推移後の状態を列に当て要素に埋め込んでいくと、次のような確率マトリクスと呼ばれるものを作ることができる。また時刻 n で X が各状態にある確率、すなわち確率分布をベクトル $\boldsymbol{p}(n)$ で表す。

$$\boldsymbol{P}=\{p_{jk}\}=\begin{bmatrix}p_{00}&p_{01}&p_{02}&\cdots\\p_{10}&p_{11}&p_{12}&\cdots\\ \cdot&\cdot&&\\ \cdot&\cdot&&\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\boldsymbol{p}(n)=[\ p_0(n)\quad p_1(n)\quad p_2(n)\quad\cdots\ ]\cdots\cdots\cdots (3)$$

するとこれらは、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(n)\boldsymbol{P}&=[\ p_0(n)\quad p_1(n)\quad\cdot\ ]\begin{bmatrix}p_{00}&p_{01}&\cdots\\p_{10}&p_{11}&\cdots\\ \cdot&\cdot&\\ \cdot&\cdot&\end{bmatrix}\\&=\boldsymbol{p}(n+1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)\end{aligned}$$

なる関係を持つ。これを展開すると、

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{p}(1)&=\boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}\\\boldsymbol{p}(2)&=\boldsymbol{p}(1)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^2\\&\ \vdots\\\boldsymbol{p}(n)&=\boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^n\end{aligned}\right.\cdot (5)$$

であり、確率変数 X の初期確率分布 $\boldsymbol{p}(0)$ と確率マトリクス $\boldsymbol{P}$ がわかれば、定常範囲の確率変数 X の状態を時刻ごとに追うことができる。

3. 解析の方法

解析では、1 質点弾性系を強制振動させた場合の、系の単位質量あたりの振動エネルギーの 2 倍を確率変数 E とし、その離散化した値の離散時刻毎の確率分布をマルコフ連鎖における解析の対象とする。すなわち運動方程式を、

$$\ddot{X}+2h\omega_0\dot{X}+{\omega_0}^2X=f(t)\ \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

として、

$$E=\dot{X}^2+{\omega_0}^2X^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

である。ここに、h :減衰定数,ω_0 :系の固有角振動数, $f(t)$:強制外力である。

マルコフ連鎖に従う E の推移則としては、各時刻ごとに独立に到着する、ある確率分布に従う加速度 a によるインパルス作用時の応答が考えられる。ある初期点 (x_0,v_0) にこのような外力が加わる場合の Δt 秒後の応答値 $(X(\Delta t),\dot{X}(\Delta t))$ は運動方程式、

$$\ddot{X}+2h\omega_0\dot{X}+{\omega_0}^2X=a\Delta t\delta(t)\ \cdots\cdots\cdots (8)$$

を解くことにより得られる。これと (7) 式より任意の初期点に対する Δt 秒後の E の値が計算される。

応答は固有周期の卓越する狭帯域過程と仮定し、同一の振動エネルギーを持つ $(X,\dot{X})$ の組に対して、位相角 $\theta=\arctan(\dot{X}/(\omega_0X))$ の存在確率は一様とする。E の推移量はそれらの各点における外力の大きさ毎の平均とし、ある初期エネルギー量 E_0 に対する 1 ス

テップ後の値 E_1 を決める。その生起確率は a の確率分布により定まることから確率変数 E の１ステップの推移の確率マトリクスを作成する。

4. 数値解析と結果

本研究の数値解析は、前節で示した離散化および推移の簡単化による計算の妥当性を検証する。このために、同様に狭帯域過程で、ホワイトノイズ作用時の１質点弾性系のエネルギー応答の期待値を解析的に近似した式[2]を参考にし、対比を行なう。2) による振動エネルギー $e(t)$ の近似式は以下の通りで、

$$e(t) = \begin{cases} \dfrac{S_0}{4h\omega_0}(1 - e^{-2h\omega_0 t}) & h \neq 0 \\ \dfrac{S_0 t}{2} & h = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdot (9)$$

ここに、S_0 :系に作用するホワイトノイズのパワースペクトル密度である。また (9) 式は (7) 式の 1/2 の量を評価する式であるので、数値解析の整合性の評価には $2 \times e(t)$ の値を用いる。

数値解析の際のインパルスのための加速度 a の分布は、近似式のホワイトノイズに対応して、平均 $0(m/s^2)$、分散 $1(m^2/s^4)$ のガウス分布とした。

本解析の方法による振動エネルギー E の確率分布の計算例を図１に示す。ここでは系の固有角振動数を $\omega_0 = 2\pi$、減衰定数を $h = 0$ として、初期状態で振動エネルギー０の場合の５秒間の確率分布形状を表している。

また、得られた確率分布による E の各時刻毎の期待値と対応する近似式を図２に示す。系の周期及び初期状態は先の例と同じで、減衰定数を $h = 0$ と 0.05 の２つについて対比した。これを見ると、本解析はエネルギー応答を離散化された代表点間の推移のみでモデル化するので、この最小単位より小さい推移が無視され確率分布によるエネルギー量の期待値が近似式より小さくなることがわかる。したがって近似式との厳密な一致は見られない。しかし、弾性系の挙動の定性的評価としてはその傾向が一致している。このことから、本解析のようにモデル化した１質点弾性系のエネルギー応答の確率的解析は十分その現象を説明し得る。

5. まとめ

数値解析から、構造の振動エネルギー量の離散化によるマルコフ連鎖を用いた１質点弾性系の解析は、十分その特性を確率的に示すことができた。

そこで、本研究の目標である弾塑性系の解析は、bi-linear 復元力特性など構造物に見られる種々の復元力特性を次のように考える。復元力特性の中で、弾性的な挙動部分は、今回の解析のようにモデル化した解析面を複数用意する。与えられた初期点からの弾性限界への応答の推移は塑性化を意味するものとし、各面から他の面に至る塑性部分の応答の推移も明らかにしておく。これらの解析を組合せることで履歴特性などの応答性状をモデル中に反映し、全体として弾塑性応答のシステムをなすように解析を行なう。

このような方法で、ランダムな地震外力の特性と構造物との安全性の対応を示すことができる。

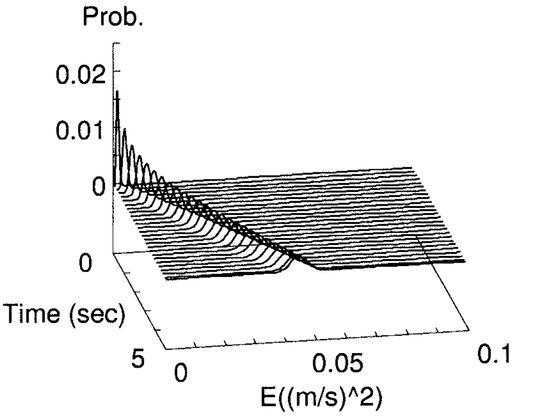

図１ 確率分布の経時変化 ($\omega_0 = 2\pi, h = 0$)

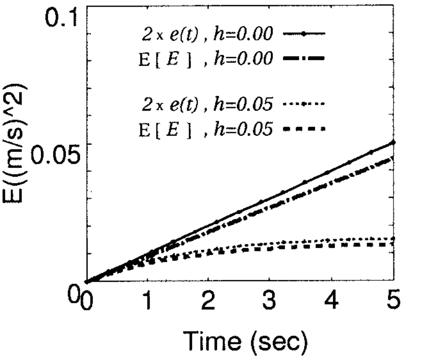

図２ 数値解析と近似式との対比

参考文献

1) 松島 豊:「ホワイトノイズを受ける１自由度形の非線形ランダム応答」: 日本建築学会論文報告集 第226号 昭和52年５月
2) 柴田 明徳:最新耐震構造解析,pp.168〜pp.191:森北出版,1981
3) D.R.Cox,H.D.Miller: The Theory of Stochastic Processes: Science Paperbacks 134,pp.76〜 145, 1965