

鉛直地震動に伴うタンク内の液面共振現象の解析

高山 知 司*・西山 貴 大**

1. ま え が き

地震などの振動外力によって石油タンク等の液体を貯蔵しているタンク内では液面が大きく振動し、タンクが倒壊したり、倒壊に至らなくても液体があふれ出したり、浮き屋根がタンク側壁と衝突して火災を引き起こしたりして大きな災害になることがある。このような災害は珍しいことではなく、過去には多くの災害事例がある。これらの原因はタンク内の液体が外力の振動と共振し、大きな液面振動が励起され、その結果として災害が起きたと推定される。

水平振動による液面の共振については、数多くの研究がなされ (Chen Haroun, 1996; Molhotra・Veletsos, 1994), 液面振動振幅が非常に大きくなるスロッシング現象に対する解析が行われるようになっている。しかしながら、液面振動に対して鉛直振動の効果を検討したものは非常に少ない (Veletsos・Tang, 1996)。著者の 1 人 (Takayama, 1975) が理論的な検討を行っているが、数値計算など詳細な検討はしていない。

そこで、本報告では、液面振動に水平と鉛直の両振動を同時に考慮して、タンク内の液面振動の線形方程式を求め、それを用いて鉛直振動の影響を検討した。ここでは、鉛直振動加速度が重力加速度より十分に小さいと仮定し、鉛直振動と重力の加速度の比を用いて、摂動展開して共振現象に対する鉛直振動の影響を調べるとともに、線形方程式を数値計算することによってこの影響を確認している。

2. 鉛直振動を考慮した液面振動の理論

2.1 液面振動方程式と線形化

図-1 のような任意形状の柱状タンクが水平と鉛直に振動させられたと仮定して、タンクと共に水平方向と鉛直方向に移動する座標を考え、この移動座標に対するタンク内の流体運動を考えると、その運動方程式は次式のようにになる。

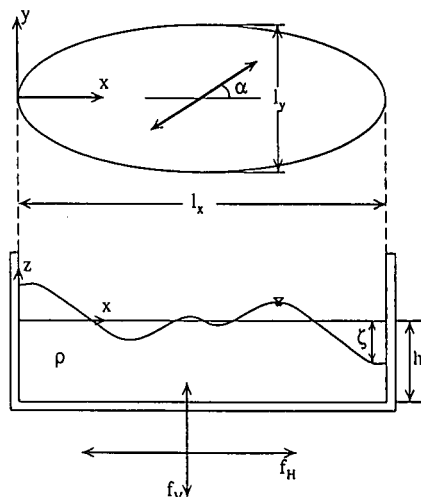


図-1 タンクと座標系

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{F} \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに、 $\mathbf{v}$ は流体の速度ベクトル、 t は時間、 ∇ は勾配ベクトル、 ρ は流体の密度、 p は流体圧力、 $\mathbf{F}$ は外力ベクトルである。これらの勾配と速度、外力ベクトルは次式のようにになる。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\mathbf{v} = (u, v, w) \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\mathbf{F} = (f_H''(t) \cos \alpha, f_H''(t) \sin \alpha, f_v''(t) + g) \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに、 x, y は水平面内の座標系、 z は鉛直方向の座標、 $f_H(t)$ は水平方向のタンク振動変位、 $f_v(t)$ はタンクの鉛直振動変位、 α は x 軸に対するタンク水平変動の方向角、 g は重力加速度である。

さらに、流体の連続式は次式のようにになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \cdots \cdots (5)$$

液面上での圧力は大気圧に等しく、液面上にある流体は常に液面上にあることから、液面上での境界条件は次式のようにになる。

$$p_{z=\zeta} = 0 \quad \cdots \cdots (6)$$

* フェロー 工博 京都大学 防災研究所
** 正 会 員 工修 住友金属工業株式会社

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w_{z=\zeta} - u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (7)$$

ここで、 ζ はタンク内の液面鉛直変動量である。

座標系はタンクと一緒に移動するために、タンク底面と側壁面では境界面垂直方向の流体の運動速度はなくなり、次式のように与えられる。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は境界面法線方向の単位ベクトルである。初期条件としてタンクが振動し始めるまでは、液体は静止状態にあると考える。

運動方程式(1)および液面境界条件式(6)と(7)は非線形項を含むので、そのまま解析することは困難であり、数値シミュレーションを行わなければならない。このような数値シミュレーションを実施すると、液面振動の形態を把握することはできるが、複雑で非常に多くの計算を行わなければならない。そこで、本研究では鉛直振動の影響を明らかにすることを目的としており、運動を線形化して、その影響を調べることにした。

タンク振動の水平と鉛直の振動振幅がタンクの諸元や水深に比較して、非常に小さいと仮定すると、式(1)の運動方程式と式(6)と(7)の液面境界条件はそれぞれ次式のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{F} \quad (9)$$

$$p_{z=0} = \rho \zeta (g + f_v''(t)) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w_{z=0} \quad (11)$$

2.2 矩形タンク内の液面振動

矩形タンクの長さを l_x 、幅を l_y として、それぞれの方向を x 、 y 軸とする。 x 、 y 軸方向の流体速度 u 、 v がタンクの長さおよび幅内で側壁での境界条件を満足するフーリエ級数で次式のように表されると仮定する。

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n'(t) B_n(z) \sin \frac{n\pi x}{l_x} \quad (12)$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) D_n(z) \sin \frac{n\pi y}{l_y} \quad (13)$$

これらの式を運動方程式や境界条件式に代入して、整理すると、未知関数 $B_n(z)$ と $D_n(z)$ は次式のように求まる。

$$B_n(z) = \cosh \frac{n\pi}{l_x} (z+h) \quad (14)$$

$$D_n(z) = \cosh \frac{n\pi}{l_y} (z+h) \quad (15)$$

ここに、 h は液体の深さである。また、時間に関する未知関数は次の方程式を満足する関数になる。

$$A_n''(t) + \frac{n\pi}{l_x} A_n(t) (g + f_v''(t)) \tanh \frac{n\pi h}{l_x}$$

$$= -\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} f_H''(t) \cos \alpha / \cosh \frac{n\pi h}{l_x} \quad (16)$$

$$C_n''(t) + \frac{n\pi}{l_y} C_n(t) (g + f_v''(t)) \tanh \frac{n\pi h}{l_y} \\ = -\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} f_H''(t) \sin \alpha / \cosh \frac{n\pi h}{l_y} \quad (17)$$

これによってすべての未知関数を求めることができ、タンク内の液面振動は次式で与えられる。

$$\zeta = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l_x} \sinh \frac{n\pi h}{l_x} \\ - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \cos \frac{n\pi y}{l_y} \sinh \frac{n\pi h}{l_y} \quad (18)$$

さらに、流体圧力は次式で与えられる。

$$p = -\rho(g + f_v''(t))z - \rho \left\{ \left(x - \frac{l_x}{2} \right) \cos \alpha \right. \\ + \left(y - \frac{l_y}{2} \right) \sin \alpha \Big\} f_H''(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{l_x}{n\pi} A_n''(t) \right. \\ \times \left\{ \cos \frac{n\pi x}{l_x} \cosh \frac{n\pi(h+z)}{l_x} \right. \\ \left. - \cos \frac{n\pi}{2} \cosh \frac{n\pi h}{l_x} \right\} \\ + \frac{l_y}{n\pi} C_n''(t) \left\{ \cos \frac{n\pi y}{l_y} \cosh \frac{n\pi(h+z)}{l_y} \right. \\ \left. - \cos \frac{n\pi}{2} \cosh \frac{n\pi h}{l_y} \right\} \Big] \quad (19)$$

2.3 円筒タンク内の液面振動

円筒タンクの場合には (x, y) の座標系を (r, θ) の円筒座標系に座標変換して取り扱う。ここで、座標原点は円筒の中央とし、 θ は x 軸の正方向から反時計回りに測った角度である。また、水平振動の方向は x 軸の方向とする。

円筒タンクの側壁での境界条件を満足する r 軸方向の流体速度 u_r を次式のように仮定する。

$$u_r = \sum_{i,n} G_{in}'(t) H_{in}(z) J_i(k_{in}r) \cos i\theta \quad (20)$$

ここに、 k_{in} は $J_i(k_{in}R) = 0$ を満たす n 番目の解である。また、 R はタンクの半径、 $J_i(k_{in}r)$ は第1種 i 次 Bessel 関数である。

r 方向の運動方程式から求まる流体圧力の式を θ 方向の流体の運動方程式に代入して、 θ 方向の流速 u_θ は次式のように表すことができる。

$$u_\theta = -\sum_{i,n} \frac{i}{k_{in}r} G_{in}'(t) H_{in}(z) J_i(k_{in}r) \sin i\theta \quad (21)$$

流体の連続式、液面条件、タンク底面条件を用いて、 $H_{in}(z)$ は次式のようになる。

$$H_{in}(z) = \cosh k_{in}(h+z) \quad (22)$$

また、 $G_{in}(t)$ は次式を満足する解である。

$$G_{in}''(t) + k_{in}(g + f_v''(t)) G_{in}(t) \tanh k_{in}h$$

$$= -f_H(t) \frac{I_n}{\cosh k_{1n}h} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 I_n は次式で与えられる。

$$I_n = \frac{2k_{1n}R}{\{(k_{1n}R)^2 - 1\} J_1(k_{1n}R)} \dots\dots\dots (24)$$

式 (23) は $i=1$ の場合の方程式であるが、 $i=1$ 以外の条件では初期条件から $G''_n(t)=0$ となっており、有為な解は $i=1$ の場合だけになる。

液面振動と流体圧力は次式で与えられる。

$$\xi = \sum_n G_{1n}(t) J_1(k_{1n}r) \sinh k_{1n}h \cos \theta \dots\dots\dots (25)$$

$$p = -\rho(g + f''_H(t))z - \rho r f''_H(t) \cos \theta \\ - \rho \sum_n \frac{1}{k_{1n}} G''_{1n}(t) J_1(k_{1n}r) \cos k_{1n}(h+z) \cos \theta \dots\dots\dots (26)$$

2.4 液面振動に対する鉛直振動の影響

矩形タンクの場合には式 (16) と (17)、円筒タンクでは式 (23) で示される方程式、どれも同じ方程式形をしており、一般的に表すと次式のようなになる。

$$q''_n(t) + \alpha_n(g + f''_H(t))q_n = -\beta_n f''_H(t) \dots\dots\dots (27)$$

鉛直振動がない場合、式 (27) は容易に解くことができ、次式のようなたたみ込み関数で表すことができる。

$$q_n(t) = -\beta_n \left\{ f_H(t) - \omega_n \int_0^t \sin \omega_n(t-\tau) f_H(\tau) d\tau \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $\omega_n = \sqrt{g\alpha_n}$ で、タンクの固有各周波数を示す。水平振動が $f_H(t) = b_H \sin \Omega t$ で振動するとき、液面振動の共振は、固有周期と水平振動周期が一致する $\omega_n = \Omega$ のときに起きる。このとき、液面振動の振幅 ξ_{amp} は矩形タンクで $\xi_{amp} \propto t/\sqrt{n}$ となっており、高次の共振モードほど時間的な増幅が小さくなる。

次に、鉛直振動も水平振動も正弦振動をすると仮定し、鉛直振動の加速度と重力加速度との比を ε とおいて、 ε が小さな値であるとする。そして、 $q_n(t) = S_n(t) + U \sin \Omega t$ とおいて、これを式 (27) に代入すると、次式のようなになる。

$$S''_n(t) + \omega_n^2 S_n(t) = \varepsilon \omega_n^2 \{ S_n(t) + U \sin \Omega t \} \sin \gamma t \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $U = E/(\omega_n^2 - \Omega^2)$ 、 $E = \beta_n b_H \Omega^2$ 、 γ は鉛直振動の角周波数、 b_H は水平振動の振幅である。

式 (29) 中の $S_n(t)$ を ε に関して摂動展開して、 $S_n(t)$ を求めると、以下のようなになる。ただし、 ε に関して高次の項も求めることができるが、ここでは 1 次の項まで示す。

$$S_n(t) = \eta_0 \sin \phi + \varepsilon \omega_n^2 \left[\frac{\eta_0 \cos(\phi + \gamma t)}{2\gamma(2\omega_n + \gamma)} + \frac{\eta_0 \cos(\phi - \gamma t)}{2\gamma(2\omega_n - \gamma)} \right. \\ \left. - \frac{U \cos(\gamma + \Omega)t}{2(\omega_n^2 - (\gamma + \Omega)^2)} + \frac{U \cos(\gamma - \Omega)t}{2(\omega_n^2 - (\gamma - \Omega)^2)} \right] \dots\dots\dots (30)$$

式 (30) からわかるように、それぞれの分母が 0 になるときに、鉛直振動によって液面振動に共振が起きることが予測される。

3. 鉛直振動による共振現象の励起

3.1 数値計算法と計算条件

式 (27) で示される形の方程式を解くために Runge-Kutta 法を用いて数値計算を行った。鉛直振動がない場合について数値計算結果と式 (28) の解析解を比較することによって数値計算の妥当性を検証した。水平加速度は次式のように与えることにした。

$$f''_H(t) = b_H \Omega^2 \left\{ -\sin \Omega t + \frac{a}{\Omega} \exp(-at) \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 a は定数であるが、 $a=100\Omega$ とすると、解析解と同じ形状になったので、この値を用いることにした。鉛直振動についても式 (31) と同じ形状の加速度を用いた。

数値計算に用いたタンクの諸元は、矩形タンクでは長さ 50 m、液体の深さ 20 m で、タンクの長さ方向に振動を与えることにしたので、幅は関係しない。また、円筒タンクでは、半径 25 m、液体の深さ 20 m とした。水平と鉛直の振動変位の振幅をそれぞれ 10 cm と 5 cm にした。

3.2 矩形タンク内の共振現象

図-2 は、水平振動周波数が 0.1 Hz で、 $\gamma=2\omega_n$ の共振条件を満足するような鉛直振動数を与えたときの矩形タンク側壁面での液面変位の時系列を示したものである。四角で囲った値が鉛直振動数で、図-2 の各図とも共振による条件で鉛直振動数を与えている。

縦軸の液面振動は水平振動の変位振幅で無次元化している。図-2 中の実線は、鉛直振動がない場合、点線は鉛直振動がある場合の変位時系列である。図-2 中のどの図でも液面振動に共振が起きなくてはならないが、低次の固有モードでは共振現象がほとんど起きておらず、高次の固有モードで発生しているように見える。この場合の計算は、鉛直振動の変位振幅を一定にしており、鉛直振動数が低いほど鉛直方向の加速度が小さくなる。そのために、低次の固有モードでは共振現象が明瞭に現れなかったと考えられる。そこで、鉛直加速度を重力加速度の 0.1 倍として、これを一定に保つようにして計算したのが図-3 である。この図でわかるように、加速度を一定に保つと、低次の固有モードでも共振現象が現れることが明らかになった。

液面振動は多くの固有モードの重ね合わせとなっている。そこで、鉛直振動に対応するモードで共振が起きているか調べた。図-4 は、水平振動を 0.1 Hz、鉛直振動を 0.661 Hz とした条件での結果である。図中の実線は水平振動だけの場合、点線は鉛直振動が加わった場合で

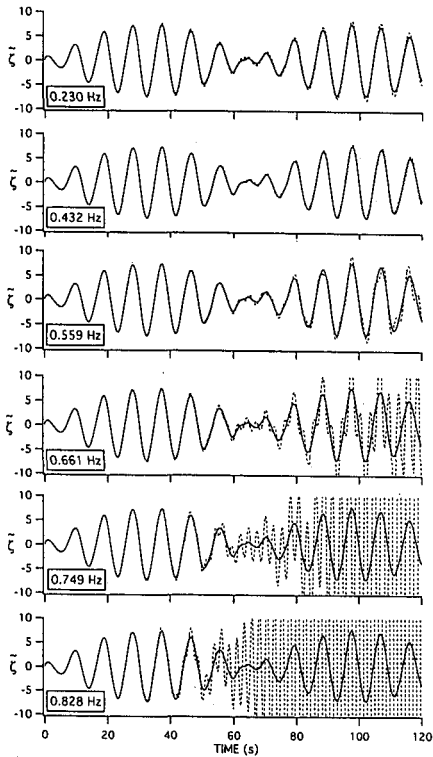


図-2 矩形タンクにおけるのときの液面変動(水平0.1 Hz)

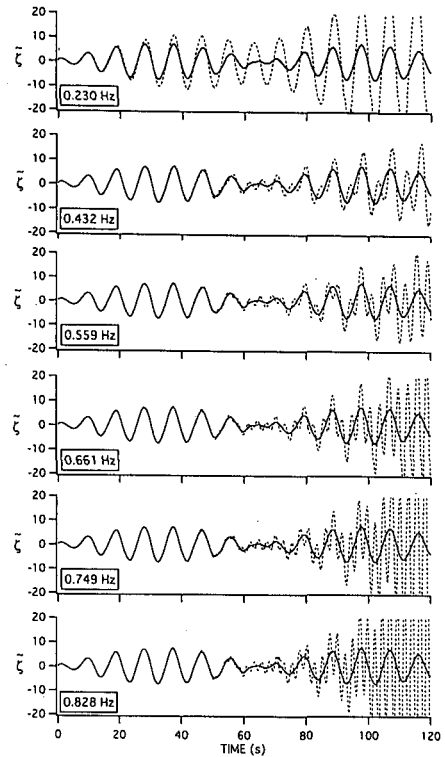


図-3 矩形タンクにおいて鉛直加速度を一定としたときの液面変動

ある。図-4の1番上の図は、最低次の固有周期モードで起きた液面振動であり、2番目は、2次の固有モードで起きたものである。ただし、図-4の縦軸は $P_n(t) = A_n(t) \sinh(n\pi h/l_x)$ を表したものである。1、2次のモードが卓越しており、他のモードによる水面変動は非常に小さい。これらを加え合わせた図が図-2の上から4番目の鉛直振動0.661 Hzの図である。図-4でわかるように、この鉛直振動数による共振は固有周波数が0.330 Hzになる $n=7$ のときに点線で示すようになる。他の固有モードには点線が現れていない。つまり、鉛直振動による共振は特定の振動に現れ、時間の経過と共に、この振動が卓越するようになる。液面振動から見ると、時間の経過と共に、液面の振動周期が変化したように見える。

図面では示さないが、鉛直と水平振動数の差が固有振動数に一致する時も、液面振動の共振が起きていた。

3.3 円筒タンク側壁に働く流体圧と力、モーメント

円筒タンクではタンクに作用する流体力について検討する。図-5は、水平振動数0.5 Hz、鉛直振動数0.582 Hzで振動した場合に $\theta=0$ の円筒側面における変動流体圧と円筒に働く x 軸方向の力と円筒を転倒させようとするモーメントの時系列を示したものである。ただし、これらの値は無次元量で示している。図-5の上から3つの

図は流体圧を示したもので、上から液面、1/2の深さの点、液底での流体圧である。上から4番目の図が流体力で、一番下がモーメントである。

液面での圧力は、水面の振動と同じ波形を示している。液面変動には60 s以降に鉛直振動の影響が現れているが、余り明瞭でないために、流体圧にははっきり現れていない。液面変動の影響は液深の半分の点およびタンク底では現れていない。流体圧は鉛直と水平の振動数の差で生じる周期で大きくビート現象を起こしている。このビートの振幅は深くなるほど大きくなる。

円筒全体に掛かる流体力は、鉛直振動の影響が打ち消し合うために、水平振動と同じ周期で変動する。また、液面変動に伴う影響は流体力にはほとんど現れていない。これは液面振動が余り大きくないためだと考えられる。モーメントについても、流体力とほぼ同じことが言える。

4. あとがき

矩形および円筒タンクを対象にして、タンク内の液面振動に及ぼす鉛直振動の影響を調べた。鉛直振動数の半分および水平と鉛直の振動数の差が液面振動の固有振動数に一致するときに、液面が共振することがわかった。

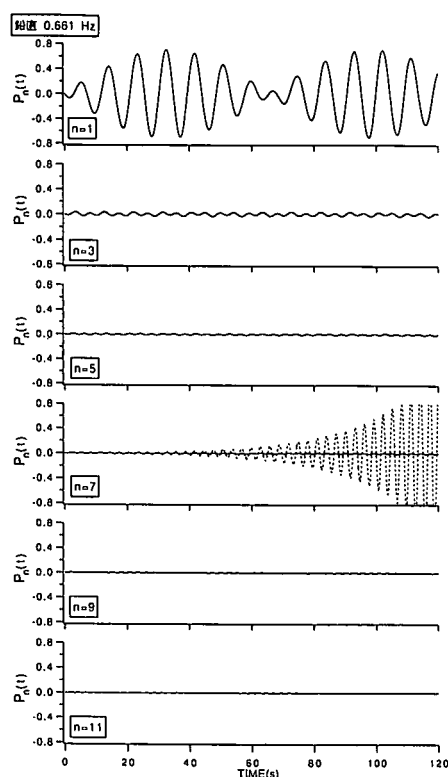


図-4 矩形タンクにおける固有モード別の変動
(水平 0.1 Hz, 鉛直 0.661 Hz)

鉛直振動が液面振動に大きく影響すること、また、流体圧にも影響するが、それは加速度としての影響であることがわかった。

これによって鉛直振動の基本的な効果は把握することができたので、今後は実際の地震動でどのような液面振動が生じるか、数値シミュレーションで明らかにしたい。

参 考 文 献

Chen, W. and M. A. Haroun (1996): Large amplitude liquid

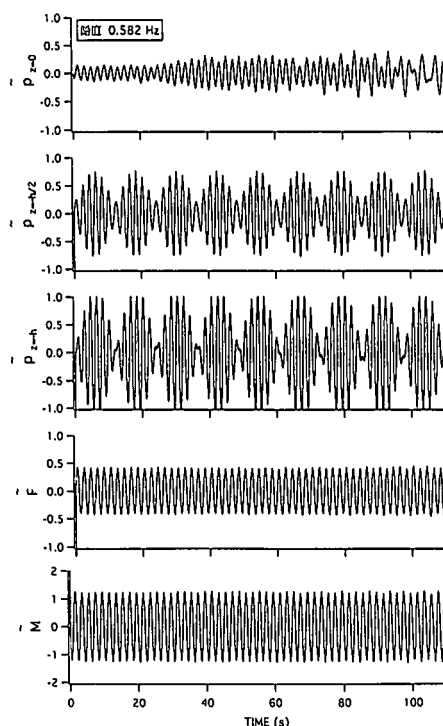


図-5 円筒タンクにおけるの時の圧力, 力, モーメント(水平 0.5 Hz, 鉛直 0.582 Hz)

sloshing in seismically excited tanks, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, pp. 653-669.

Malhotra, P. K. and A. S. Veletsos (1994): Uplifting Response of unanchored liquid-storage tanks, J. Structural Eng., ASCE, Vol. 120, No. 12, pp. 3525-3547.

Takayama, T. (1976): Theory of transient fluid waves in a vibrated storage tank, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 15, No. 2, pp. 3-53.

Veletsos, A. S. and Yu Tang (1986): Dynamics of vertically excited liquid storage tanks, J. Structural Eng., ASCE, Vol. 112, No. 6, pp. 1228-1246.