

地震時動水圧に与える非線形性および重力項の影響

泉 宮 尊 司*・田 辺 剛**

1. 緒 論

近年、重力式海洋構造物や水中トンネルなどの構造物の安定性を評価するために、これら構造物に働く地震時動水圧の正確な算定法が望まれている(田中, 1983, 山崎ら, 1993)。これまで地震時の動水圧の解析には、2次元あるいは3次元の微小振幅音波の波動方程式が基礎式として用いられてきた。このような解析手法として清川(1984, 1985)等の研究が挙げられるが、この方法では流体の圧縮性は考慮されていない。しかしながら、構造物の設置水深や振動周期によっては、流体の圧縮性だけでなく、非線形性や重力の影響が無視できない可能性もあると考えられる。したがって、より精度よく地震時動水圧を算定するためには、これら非線形性や重力の影響がどの程度の大きさであるか、詳細に調べておく必要がある。

そこで本研究では、重力の影響も考慮した圧縮性流体の基礎式を可能な限り厳密に取扱ひ、動水圧計算のための非線形波動方程式を導く。さらに、その方程式を用いて、鉛直壁や円柱状構造物に関して非線形性や重力の地震時動水圧に与える影響について詳しく調べることにした。

2. 非線形波動方程式の誘導

本研究では、圧縮性流体の非線形性や重力の影響を厳密に取り入れるために、次の連続式、運動量保存式およびエネルギー保存式を用いることにする(例えば、巽, 1982)。

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{grad } p + \rho \mathbf{F} \quad (2)$$

$$T \frac{DS}{Dt} = \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho} \Phi \quad (3)$$

ここに、 \mathbf{u} は流体の速度成分、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 $\mathbf{F}=(0, 0, -g)$ 、 g は重力加速度、 T は絶対温度、 S はエン

トロピー、 κ は熱伝導率、 Φ は逸散関数、 D/Dt はLagrange微分、 t は時間を表す。

ここで、周波数が数 Hz 程度の音響現象を考えると、状態変化は断熱的であると考えられ、またエネルギー逸散も近似的に無視できる。このような場合には、エネルギー保存則は、

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \quad (4)$$

となり、流線に沿って等エントロピー流れであることを示している。この時、圧力 p および密度 ρ は、それぞれ次の関係式で表せる。

$$p = p(\rho, S), \quad \rho = \rho(p, S) \quad (5)$$

ここで、圧力 p の Lagrange 微分をとり、式(4)を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \frac{DS}{Dt} \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{D\rho}{Dt} = C_s^2 \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \quad (6)$$

なる関係式を得る。ここに、 $C_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_s = \text{const}$ であり、 C_s は流体中の音速である。

これより流れが渦なしであると仮定すると、速度ポテンシャル ϕ を用いて、連続式および運動量保存式は次のように表せる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla^2 \phi = 0 \quad (7)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + P + gz = 0 \quad (8)$$

ここに、 P は圧力関数であり、断熱変化の場合には密度 ρ が圧力 p のみの関数となるために、次式で表せる。

$$P = \int^p \frac{dp}{\rho(p)}, \quad dP = \frac{dp}{\rho(p)} \quad (9)$$

さらに、上式の関係より、

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } P, \quad \frac{DP}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (10)$$

が得られる。式(6)および連続式(7)の関係より、

$$\frac{Dp}{Dt} = C_s^2 \frac{D\rho}{Dt} = -\rho C_s^2 \nabla^2 \phi \quad (11)$$

* 正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科
 ** 工修 鹿島建設

が得られ、この式と式 (10) および式 (8) を用いると、

$$C_s^2 \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = -\frac{DP}{Dt} \\ = -\frac{D}{Dt} \left\{ \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gz \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。上式を計算すると次の非線形波動方程式を得る。

$$\phi_{tt} - C_s^2 \nabla^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi)^2 \\ + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi)^2 = 0 \dots\dots\dots (13)$$

上式において、 C_s^2 で除し、 C_s を無限大にすると、第 2 項のみが残り、非圧縮性流体の基礎式となる。また、第 1 項および第 2 項までが従来の動水圧解析に用いられている基礎式であり、正弦振動を仮定すると Helmholtz 方程式が得られる。第 3 項が重力の影響を表した項であり、第 4 および第 5 項が非線形項である。その非線形度は、それぞれ 2 次および 3 次である。なお、厳密に言えば、水中音速 C_s も一定ではなく、速度ポテンシャル ϕ の関数となる (例えば、Lighthill, 1978) が、ここで取り扱う現象が数 Hz 程度と低周波数でかつ液体であるので、ほぼ一定であると近似的に見なしても精度はそれほど低下しないものと考えられる。

なお、式 (13) には流体の圧縮性、非線形性および重力の影響が考慮されているので、地震時動水圧の解析だけでなく、衝撃砕波圧、津波や海震の発生 (例えば、清川・稲田, 1985) の解析にも用いることができる。

3. 動水圧に与える重力項の影響

まず、動水圧に与える重力項の影響を調べるために、式 (13) の基礎式で第 3 項までの線形方程式を取り扱うことにする。

$$\phi_{tt} - C_s^2 \nabla^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

境界条件については、 z 軸を上向きにとりその原点を静水面にとると、自由表面 ($z=0$)、海底面上 ($z=-h$) および構造物側面上 ($x=0, -h \leq z \leq 0$) で、次式を満たす必要がある。

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0 \quad (z=0) \dots\dots\dots (15)$$

$$\eta = -(1/g)\phi_t \quad (z=0) \dots\dots\dots (16)$$

$$\phi_z = 0 \quad (z=-h) \dots\dots\dots (17)$$

$$\phi_z = (a/g)\sin \omega t \quad (x=0, -h \leq z \leq 0) \dots\dots (18)$$

ここに、 η は水面変動、 h は静水深、 $a = a/g$ は水平震度、 a は水平加速度、および ω は角振動数である。これらの境界条件を満たす、式 (14) の解を求め、鉛直壁に作用する動水圧 p を求めると、

$$p = -4i\rho g \left\{ \frac{\sinh k_o h \sin k_{c,o} x}{k_{c,o}(2k_o h + \sinh 2k_o h)} \cosh k_o(z+h) \right. \\ \left. - \sum_{m=r+1}^{\infty} \frac{\sinh k_m h \exp(-k_m x)}{k_{c,m}(2k_m h + \sinh 2k_m h)} \cos k_{c,m}(z+h) \right\} \\ \cdot \exp(gz/2C_s^2) \exp(i\omega t) \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここに、

$$k_o \tanh k_o h = \omega^2/g, \quad k_m \tan k_m h = -\omega^2/g \dots\dots (20)$$

$$k_{c,o}^2 = k_o^2 + \left\{ \frac{\omega^2}{C_s^2} - \frac{g^2}{4C_s^4} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$k_{c,m}^2 = k_m^2 - \left\{ \frac{\omega^2}{C_s^2} - \frac{g^2}{4C_s^4} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

であり、式 (19) の中の r は、式 (22) の右辺の値が負となる整数 n の最大数である。

円柱状構造物については、基礎式 (14) を円筒座標系に書き換えて理論的に解くことができる。いま、円柱の半径を r_o とすると、動水圧 p は、次式で与えられる。

$$p = \rho a g \left\{ \frac{4 \sinh k_o h \cosh k_o(z+h)}{k_{c,o}(\sinh 2k_o h + 2k_o h)} \frac{H_1^{(1)}(k_{c,o}r)}{H_1^{(1)}(k_{c,o}r_o)} \right. \\ + \sum_{m=1}^N \frac{4 \sin k_m h \cos k_m(z+h)}{k_{c,m}(\sin 2k_m h + 2k_m h)} \frac{H_1^{(1)}(k_{c,m}r)}{H_1^{(1)}(k_{c,m}r_o)} \\ + \left. \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{4 \sin k_m h \cos k_m(z+h)}{k_{c,m}(\sin 2k_m h + 2k_m h)} \frac{K_1(k_m r)}{K_1(k_m r_o)} \right\} \\ \cdot \exp\left\{ \frac{gz}{2C_s^2} \right\} \cos \theta \exp(i\omega t) \dots\dots\dots (23)$$

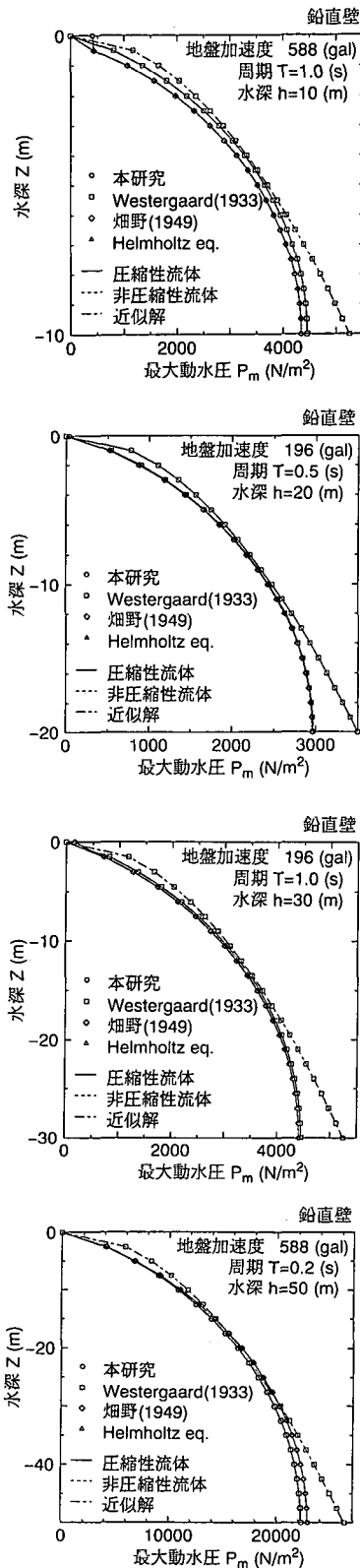
ここに、 $H_1^{(1)}$ は 1 次の第 1 種ハンケル関数、 K_1 は 1 次の第 2 種変形ベッセル関数である。 N は、式 (22) の右辺が負となる整数 m の最大値を表す。

動水圧に与える重力の影響については、(19) から式 (23) に示されるように、 $\exp(gz/2C_s^2)$ や $g^2/4C_s^4$ の形で現れるが、海水中の音速が、およそ $C_s = 1475$ m/s であるので、その影響は無視できるほど小さいことが分かる。

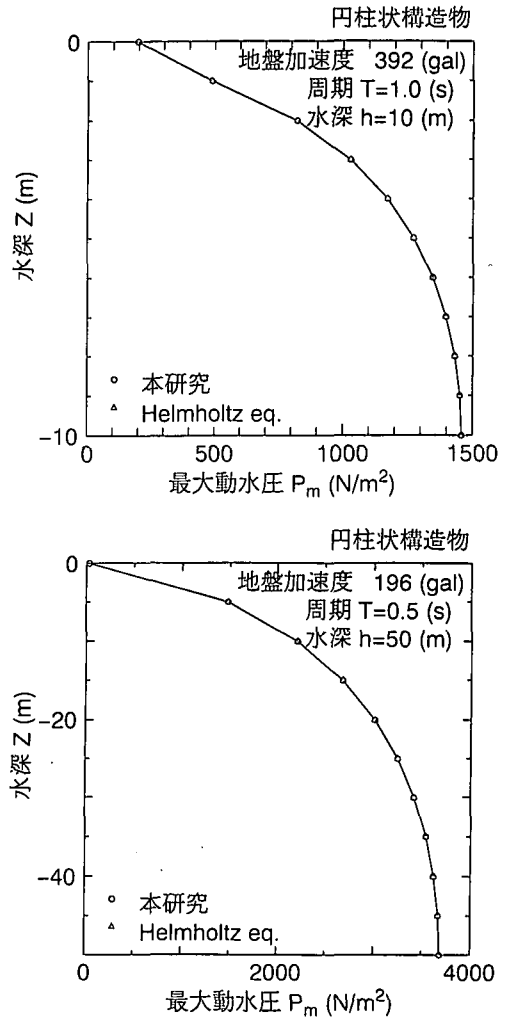
図-1 は、鉛直壁に作用する動水圧の比較を示したものである。これらの図には、自由水面を固定表面として解析した Westergaard (1933) の解とその近似解、自由水面を考慮した畑野 (1949) および Helmholtz 方程式によるものが同時に示されている。水深が浅く振動周期が比較的長い ($h=10$ m, $T=1.0$ s) 場合には、重力を考慮した本研究、畑野の解および Helmholtz 方程式によるものが同じ結果を与えるのに対して、固定表面条件を用いた Westergaard の理論値が水中ではやや大きな値を示していることが分かる。

一方、水深が 20 m で振動周期が 0.5 s の場合には、表面境界条件の影響は余り現れず、ほぼ一致した結果となっている。しかしながら、水深が相対的に深く振動周期が短い ($h=50$ m, $T=0.2$ s) 場合には、表面境界条件の差異よりも流体の圧縮性の影響の方が大きい。

図-2 は、円柱状構造物に働く動水圧の比較を示したものである。上図が、地盤加速度 392 gal、水深 10 m、振



図一 鉛直壁に作用する動水圧の比較



図二 円柱状構造物に働く動水圧の比較

動周期 1.0 s の場合で、下図が加速度 196 gal、水深 50 m、振動周期 0.5 s の場合である。重力項を考慮した結果を○印、従来の Helmholtz 方程式による結果を△印で示している。これらの図より、水表面の境界条件を自由表面として同じ境界条件を用いれば、全くと言ってよいほど一致した結果が得られている。したがって、振動周期が 1 Hz 程度以上で、水深が 50 m 以浅の条件では、重力項の影響は無視してよいものと考えられる。

4. 非線形性の影響

非線形波動方程式 (13) における非線形項の影響度を調べる前に、水中の音速 C_0 の音波の有限振幅性に対する依存性について、少し議論することにする。いま、海水の断熱状態方程式が次式で表せるものとする(例えば、竹内・遠藤, 1985)。

$$p - p_0 = A \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\mu - 1 \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 p_0 および ρ_0 は、平衡状態にある時の圧力および密度である。また、 A および μ は定数である。この時音速 C_s は、微小振幅音波の音速 C_0 を用いて、

$$C_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = C_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\mu-1} \dots\dots\dots (25)$$

と表される。ここで、Lagrange の連続式

$$\rho J = \rho_0 \dots\dots\dots (26)$$

を用いると、式 (25) は次式のように書き換えられる。

$$C_s^2 = C_0^2 J^{\mu-1} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 J は Lagrange 的な変形の Jacobian である。ところが、質量保存則より、

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{J} \frac{DJ}{Dt} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

が成立するので、これと式 (7) を用いると、

$$\frac{DJ}{Dt} - \nabla^2 \phi J = 0 \dots\dots\dots (29)$$

なる関係が得られる。上式は、式 (27) より音速 C_s の微分方程式となるので、これと式 (13) を連立させて解けば、音波の有限振幅性が考慮されたことになる。しかしながら、海水の場合気体とは異なり、密度は大きくしかも音速も大きいので、音波の有限振幅性の効果が十分に小さいことが示される。ここで、 $J = 1 + J_1$ とおき、1 次のオーダーまで考えると、Jacobian J の時間変化は式(11)より、

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J_1}{\partial t} = \nabla^2 \phi = -\frac{1}{C_s^2} \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \dots\dots\dots (30)$$

となる。上式より、Jacobian J の時間変化すなわち音速の時間変化が1次のオーダーで生じるが、その大きさは音速の2乗分の1 (2.2×10^6 分の1)となる。したがって、音速の変化は十分に小さく、実用上は一定と見なしてよいと考えられる。

これより音速を一定として考えると、式 (13) の非線形項は第4項および第5項であり、それぞれ2次および3次の非線形性を有していることになる。これらの非線形項も音速の変化と同様に十分に小さいものと推測される。したがって、ここでは2次の非線形項を1次近似解で評価し、式 (13) の第2項の大きさと比較することにより、非線形項の影響度 R_L を評価した。

$$R_L = \left| \frac{(\partial/\partial t)(\nabla^2 \phi_1)^2}{C_s^2 \nabla^2 \phi_1} \right| \dots\dots\dots (31)$$

図-3は、鉛直壁の場合の非線形項の影響度 R_L の鉛直分布を示したものである。上図が、水平加速度 588 gal、水深 50 m、振動周期 1.0 s で、下図が加速度 98 gal、水深 10 m、振動周期 0.2 s の時の結果である。この図より、いずれの条件においても、鉛直壁の場合には非線形項の影響度は 10^{-3} のオーダー以下の領域が水深の大部分を占め

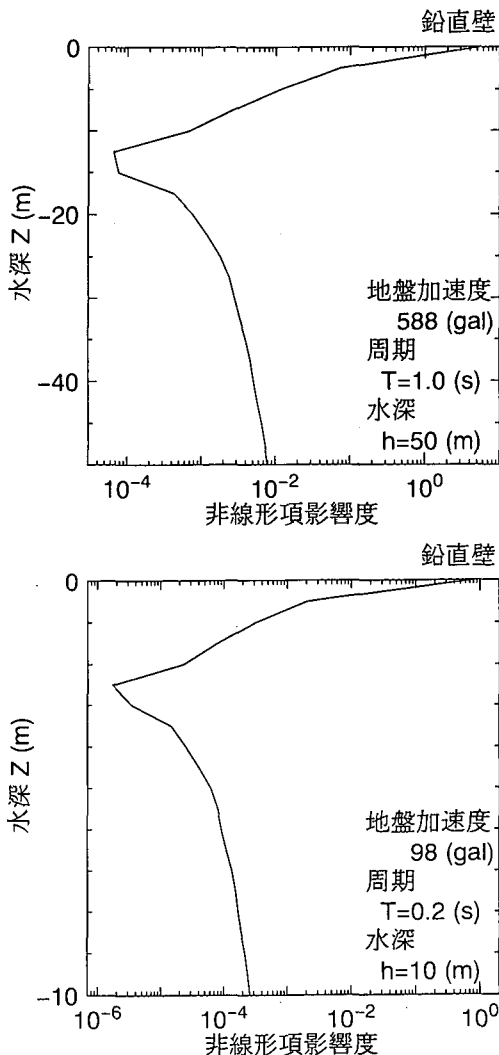


図-3 鉛直壁の場合の非線形項の影響度

ていることが分かる。水面付近においては、影響度は1のオーダーとかなり大きくなるが、これは式 (31) の分母が0に近づくために相対的に R_L の値が大きくなるためである。すなわち、水表面 ($z = \eta$) では、

$$\frac{Dp}{Dt} = -\rho C_s^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad (z = \eta) \dots\dots\dots (32)$$

が成立するために、 $\nabla^2 \phi = 0$ 、すなわち非圧縮性流体のような振る舞いをするためである。したがって、水面付近では相対的に非線形度は大きくなるが、非線形項の絶対値がそれほど大きくなるものではない。

図-4は、円柱状構造物の場合の非線形項の影響度を示したものである。円柱の半径は 20 m で、上図が水平加速度 588 gal、水深 50 m、振動周期 1.0 s で、下図が加速度 98 gal、水深 10 m、振動周期 0.2 s の時の結果である。

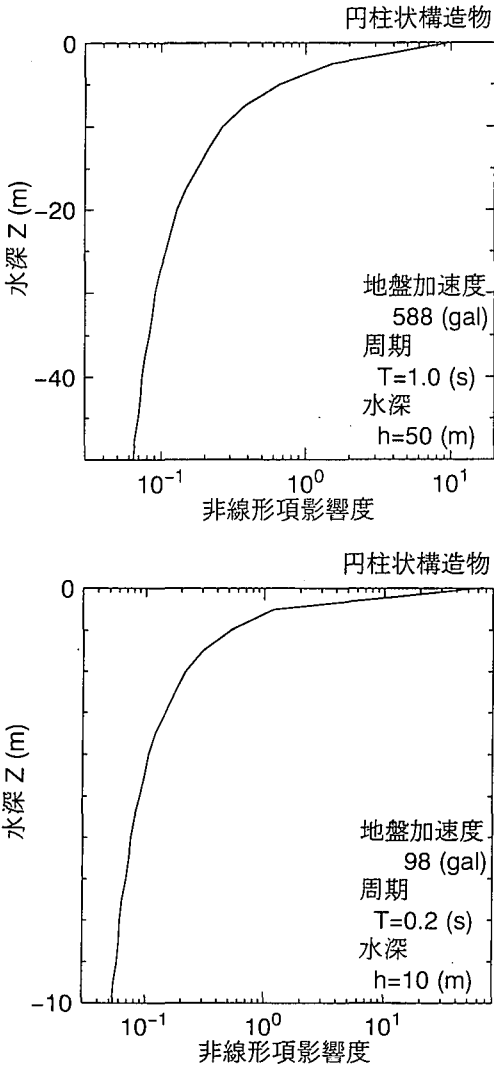


図-4 円柱状構造物の場合の非線形項の影響度

円柱構造物の場合の方が非線形度が鉛直壁より大きく、水表面を除いて 10^{-2} から 10^{-1} のオーダーとなっている。なぜ円柱状構造物の方が、相対的に非線形性の影響が大きくなるかについては、明確なことはいえないが、同じ条件で1次近似解による動水圧が鉛直壁に比べて小さいことから、相対的に非線形性の効果が大きくなったものと思われる。なお、水面付近において非線形度が相対的に大きくなるのは、鉛直壁と同様な理由によるものである。

5. 結 論

重力および非線形性を考慮した圧縮流体の波動方程式を導き、それらの影響について調べた結果、以下の事柄が明らかとなった。

(1) 重力項の地震時動水圧に与える影響を調べるために、それを考慮した線形方程式の解を求め、既存の理論解と比較したところ、自由水面を考慮した既存の Helmholtz 方程式の解にほぼ一致することが確認された。したがって、振動周期が 0.2 s から 1.0 s で、水深が 50 m 以浅であれば、重力の影響は無視できるものと判断される。

(2) 水深および振動周期によっては、表面境界条件の違いによって動水圧の大きさに差異が生じる。また、水深が大きく振動周期が短いほど流体の圧縮性の影響が有意に現れる。

(3) 音波の有限振幅性による音速の変化は、理論的には1次のオーダーから現れるが、その値は十分に小さく、音速は一定であるとしてもよいものと考えられる。

(4) 非線形性の影響度は、鉛直壁の場合は 10^{-3} のオーダー以下であり十分に小さいが、円柱構造物の場合には 10^{-2} から 10^{-1} オーダーであり、やや大きい。また、水面付近では相対的に非線形性の影響度が大きくなるが、動水圧の値が0に収束するためであり、非線形項の絶対値はそれほど大きくは変化しない。

なお、本研究は、文部省科学研究費一般研究(C)によったことを付記し、感謝いたします。

参 考 文 献

清川哲志 (1984): 流体の圧縮性を考慮した軸対称構造物の付加質量解析, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 471-475.
 清川哲志 (1985): 流体の圧縮性を考慮した面対称柱体の地震時動水圧, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 560-564.
 清川哲志・稲田 裕 (1985): Seaquakesの発生メカニズムについて, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 734-738.
 竹内俱佳・遠藤耕喜 (1985): 海洋音響における非線形現象, 月刊フィジックス, Vol. 6, No. 3, 海洋出版, pp. 152-157.
 巽 友正 (1982): 流体力学, 培風館, 453 p.
 田中良弘 (1983): 円柱海洋構造物の地震応答解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 366-370.
 畑野 正 (1949): 重力堰堤に作用する地震力の影響 (其の二), 土木学会論文集, 第3号, pp. 174-183.
 山崎 晶・森田知志・山下俊彦・水野雄三・黒崎和保 (1993): 海水の圧縮性を考慮した水中トンネルの地震応答解析, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 876-880.
 Lighthill, J. (1978): Waves in fluids, Cambridge University Press, 504 p.
 Westergaard, H. M. (1933): Water pressures on dams during earthquakes, Trans. A. S. C. E., Vol. 98, pp. 418-432.