

資料 1 MPEC モデルを用いた土木構造物の耐震性能の評価手法の提案

1. 耐震設計・計画案策定の基本的考え方

1) 個々の土木構造物は相互に関連しあって機能するため、地域防災計画レベルでそれを熟慮した計画内容を策定し、個別構造物の耐震設計はそれと整合を図る必要がある。地域防災計画のレベルでは、個々の構造物の性能ではなく、それらが構成するシステムあるいはネットワークとして機能することに着目して耐震性能を評価しなければならない。耐震設計や防災計画はもはや日常言語により表現できるレベルの問題ではなく、きわめて複雑な経済社会システムに関わる問題である。それに厳密に対処するためには、構造物の耐震設計と地域レベルの防災計画を均衡問題付き最適化問題(MPEC)のフレームで定式化して問題の基本構造を明確化し、専門家の間で合意を形成しておく必要がある。

2) 均衡問題付き最適化問題を前提にして、目的関数はいわゆる費用便益分析と整合をとるために貨幣尺度として解釈可能な評価関数とする。最適耐震設計問題を解くのが困難である場合には、まずはヒューリスティックなアプローチとして、地域レベルの防災計画ではシステムの性能を計画変数として決定する。簡便法として、システムの性能について多数の代替案を設定してそれぞれについて費用便益分析を行い、社会的純便益が最大になる代替案をもって最適解とみなすこともできる。

3) 個々の構造物の耐震設計を費用便益分析の考え方に従って実施するには、1)地域防災計画で決定されたシステムの性能を満たすことを制約条件にして費用が最小になる設計案を最適化プロセスによって決定する。または、2)その制約条件のもとで実行可能な耐震設計案を設定し、費用便益分析によりその設計案の採択を判定する。さらに、3)個々の構造物について費用便益分析を行うことが実際の設計作業において著しく困難である場合には、いくつかの標準的なケースについてあらかじめ費用便益分析を実施してケース毎に妥当な耐震設計基準を設定しておき、他の構造物の設計には標準的なケースとの類似性を比較してその耐震設計基準を援用することも可能である。

4) 個々の構造物の設計変数を決めるための指針(耐震設計指針)は、それに個別構造物の設置場所の局所的物理条件と当該構造物に特に強く関係する経済社会要因に具体的な設計変数を対応させるための計算式あるいは読み取り表として表現される。その策定は、最適耐震設計問題の解として与えられる設計変数を出力の外的基準として、設置場所の局所的物理条件と経済社会要因を入力として設計変数を出力させるシステ

ムを作成することを意味する。

2. MPECモデル

(MPEC: Mathematical Programs with Equilibrium Constraints)

2.1 モデルの基本的考え方

最適耐震設計問題を均衡制約付き最適化問題 (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints) として捉え, Argument をベクトルで表わすものとすれば次のようになる。

$$a^* = \arg \max_{a, x} W(a, b, x)$$

$$\text{s.t. } G(a, x, g) \leq 0$$

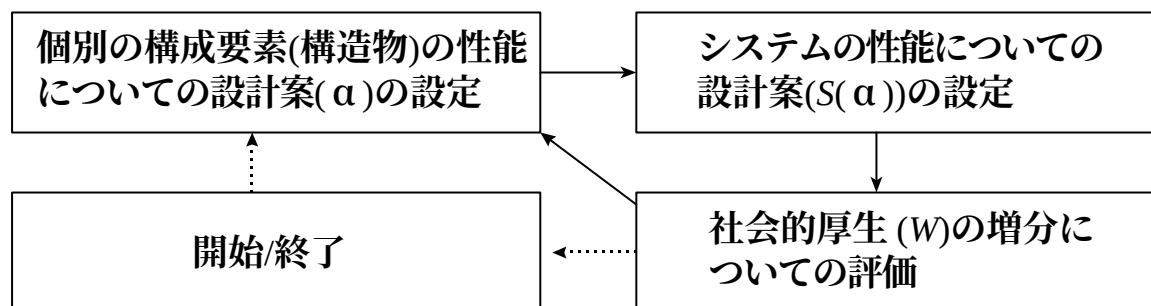
$$H(a, d) \leq 0$$

ここで, $W(\cdot)$ は社会的厚生 (社会的価値判断) を貨幣尺度で表現したものであり, 震災の確率的な要素も反映している。 a は個々の構造物またはシステムの設計案であり耐震性能を表わす。 b は対象にしている構造物またはシステムを取り巻く局地的な物理的条件などである。 x は社会経済活動であり, 生産量や消費量 (交通量や電力使用量などの社会資本サービスの消費量も含む), 市場で決定される価格などの変数も含む。 $G(\cdot)$ は構造物やシステムの性能と社会経済活動の関係を表わす条件式であり, 財貨やサービスの需給の一致や効用や利潤の均等化などの均衡条件を意味する。これが制約条件となっているために均衡制約付き最適化問題 (Luo, Pang and Ralph (1996) を参照) と呼ばれる。また, g は社会経済活動を規定する外生的要因である。 $H(\cdot)$ は設計案に関する技術的あるいは財政 (予算) 的な制約であり, d はそれを規定する外生的要因である。

最適な耐震設計案は上の目的関数を最大にする設計案として定義される。また, 相互に関係する構造物がきわめて多数あり複雑な場合には, この問題を厳密に解いて個々の構造物の設計案を得るのは極めて困難であるため, ヒューリスティックな方法で大規模問題を多段階に分解して解くなどの工夫が必要になる。構造物の性能 (α) をシステムの性能 ($S(\alpha)$) に集約して分解するなどはその一つであり, また, 地域防災計画のレベルでは計画内容の詳細化レベルとしてシステムの性能を扱うことが実際的であると言える。

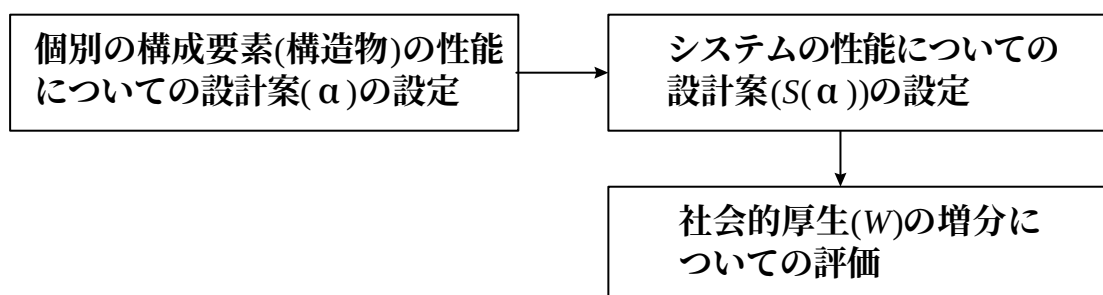
費用便益分析は, いくつかの設計代替案を与えてそれぞれについて目的関数である社会的余剰の増分を算出して比較判断することに対応する。

社会資本施設が個別の構造物からネットワーク等として構成されているシステムであるとすれば、費用便益分析を反復的に行って社会的厚生が最大になる設計案を求めるプロセスは図*-1のように表わされ、それは上の MPEC を Iterative に解くことに対応する。



図*-1 Iterative な最適設計案の求め方

個々の構造物に対して、費用便益分析を適用することは、他の構造物の性能を所与とし、かつ、反復的なプロセスを省略することを意味し、そのプロセスは図*-2のように表わされる。



図*-2 耐震設計への費用便益分析の適用

以上に対して、耐震設計の最適な指針を策定する作業は、個々の構造物(ラベル i)を取り巻く局地的な物理的条件や社会経済条件 $((b_i, g_i): b$ と g を構成する要素の一部)にその構造物の最適設計案 $(a_i^*: a^*$ を構成する要素の一部)を対応づける写像 $(R: (b_i, g_i) \rightarrow a_i^*)$ を選択することに他ならない。

2.2 MPEC モデルの定式化

均衡制約付き最適化問題 (MPEC: Mathematical Programs with Equilibrium

Constraints)としてみた耐震設計案の策定問題(Luo, Pang and Ralph (1996)を参照)は以下のように定式化される。

基本問題 P-0

$$\max_{a,t} W(V)$$

(1): 社会的厚生(貨幣尺度)

s. t.

$$V^j = \max_{R,t} E^j(v_i^j(w_i^j, a_i^j, Q_i^j, S)) \text{ for all } j \in J \quad (2) : \text{経済主体の期待効用最大化}$$

$$\text{s. t.} \quad K^j(a^j, Q, p, S, t) \leq 0 \quad (3) : \text{経済主体の行動に対する}$$

制約

$$M(a, p) \leq 0$$

(4): 市場清算条件

$$N(a, Q) \leq 0$$

(5): 外部性

$$H(e, R, t, p) \leq 0$$

(6): 財政制約

$$S - S(a, Q, e) \leq 0$$

(7): システムの性能

$$e - e(a, b) \leq 0$$

(8): 構造物(構成要素)の性能

各変数は以下のように説明される。

$W(\cdot)$: 社会的厚生関数, $V = (\Lambda, V^j, \Lambda)$: 期待間接効用関数,

$a = (\Lambda, a_g, \Lambda)$: 構造物(構成要素)の設計案, $t = (\Lambda, t_l, \Lambda)$: 財政手段(税等),

$e = (\Lambda, e_g, \Lambda)$: 構造物(構成要素)の性能, $e(a, b) = (\Lambda, r(a_g, b_g), \Lambda)$: 設計案と局地的な

物理的条件の関数として定義される構造物の性能, $a^j = (\Lambda, a_i^j, \Lambda)$: 経済主体 j の状態

毎の行動からなるベクトル, $a = (\Lambda, a^j, \Lambda)$: 各主体の行動からなるベクトル,

$w^j = (\Lambda, w_i^j, \Lambda)$: 経済主体 j の状態別の賦存資源量からなるベクトル, $Q = (\Lambda, Q_i, \Lambda)$:

状態別の外部(不)経済, $p = (\Lambda, p_i, \Lambda)$: 状態別の価格変数からなるベクトル, $i \in I$: 自然

災害の生起状態に対応した社会経済システムの状態のラベル, $j \in J$: 経済主体のラ

ベル, $E(\bullet)$: 期待値のオペレータ

個々の構造物の設計案 a と財政手段 t が与えられた環境において、個々の経済主体が各自の期待効用を最大化するように行動し、その結果、各主体の期待間接効用関数の組み合わせで表された市場均衡 V に到達する。それぞれの政策 (a, t) の下での V を、効率・衡平・安定など社会の価値規範を反映した社会厚生関数 $W(V)$ で評価する。それによって、 V を通じて最大の W を与える (a, t) や財政手段 t を最適な政策変数として選ぶことが出来る。この政策決定の最後のステップを(式(1))と同値であるが)明示的に表

すと以下ようになる。

$$a^*, t^* = \arg \max W$$

また、下位問題にあたる市場均衡への到達の過程で、自己救済、地域内相互扶助、外部支援当の関係するシナリオは式(2)から式(8)の均衡制約を特定化する際に反映される。例えば自発的な自己救済、市場保険などは経済主体の行動を表わす制約式(2)と式(3)、市場システムを表わす式(4)に反映されることになる。

地域レベルの広域防災計画であれ、個々の構造物の耐震設計であれ、いずれのレベルであっても計画・設計論は論理的には以上の MPEC で捉えられる。以下、この理論的枠組みを実用に供するための方策に話を進めていく。

まず、現実の計算の可能性に関して、個々の構造物(element)の単位が小さく詳細である場合、耐震設計を実際に MPEC を解いていくことは非効率であろう。ただし地域レベルの広域防災計画であれば、element がある程度大きな単位で捉えられ、計画・設計変数が少なければ MPEC を解くことも可能といえる。

上の可能性に留意しつつ、MPEC により最適な耐震設計案・計画案を策定するプロセスを Iterative に行う方法は、既出の図－1 に示したとおりである。

ところで、社会厚生関数の存在や成立可能性に関しては決して自明とはいえない。小林・秀島(1997)は、社会的厚生関数に資源配分の効率性(期待被害の最小化)、公平性(匿名性)、そしてカタストロフの最小化(最大被害の最小化)を同時に目的として反映させることはできない、とする「災害リスクの同時評価の不可能性定理」を提唱している。一方、Chichilnisky and Heal(1998)、小林・横松(1998)によると、カタストロフ・リスクの分散が Arrow -Debreu-Malinvaud 型の証券・保険市場の混合一般均衡システムにより可能であれば、前二者の目的を一定の価値規範のタイプについて社会的厚生関数に反映することが可能となる。

さらに政策の評価に対して社会厚生関数 W を採用するにあたっては、その価値観に関する社会の合意が前提となる。そのような政治的プロセス等の考慮を回避して、あくまで経済学の範疇で耐震設計案・計画案を策定する場合には、伝統的な CBA(費用便益分析)を用いるのが便宜がよい。換言すれば、MPEC の枠組みで、CBA を用いて耐震性能を社会経済的に評価しようとする作業は、1) 社会的厚生関数 W を次のような社会的純便益関数 SNB に特定化して、2) 一つの耐震設計案に対して社会的厚生の変化分を計測することに他ならない。

$$SNB = \sum_{j \in J} \{s(w^j, p^a, Q^a, S^a, w^j(a^b, t^b)) - s(w^j, p^a, Q^a, S^a, w^j(a^a, t^a))\}$$

:社会的純便益

ここで、 $w^j(a, t)$: 均衡における経済主体 j の期待効用、 a, b : 新たに導入される設計案の無と有を意味するラベル、 $s(\cdot)$: オプション価格としての等価的所得関数である。

CBA による耐震設計案の性能評価は、既出の図－2 のようなプロセスとして表わされる。この場合はフローがループしないことに注意されたい。

また、カタストロフ回避に対しては社会的厚生関数・CBA で対応することは困難である。そこで社会的厚生関数とは別の価値判断として、シビルミニマム ($\bar{v}$) を設定する。これは MPEC の基本問題に次の制約を加えることになる。

$$\min_{i \in I} \{\Lambda, v_i^j(\cdot), \Lambda\} \geq \bar{v} \quad \text{for all } j \in J \quad (9) : \text{シビルミニマム基準}$$

3. MPEC モデルの“地域防災計画”レベルの耐震性評価への適用

MPEC を 1) システムの性能 S を制御変数とした決定問題を解く最適問題と、2) その最適な耐震設計案 S^* を規定できる R の集合から費用最小化の基準で決定による構造物の設計案の決定問題とに分解して考える。1) は「地域防災計画レベル」の計画案の決定問題として捉えられる。また 2) は個々の構造物レベルでの耐震設計案の決定問題として捉えられる。1) と 2) はそれぞれ先の基本問題に対する部分問題として次のように表わせる。

部分問題 P-1

$$S^* = \arg \max_{S, t} W(V) \quad (1')$$

s. t.

$$V^j = \max_{R, t} E^j(v_i^j(w_i^j, a_i^j, Q_i^j, S)) \quad \text{for all } j \in J \quad (2')$$

$$\text{s. t.} \quad K^j(a^j, Q, p, S, t) \leq 0 \quad (3')$$

$$M(a, p) \leq 0 \quad (4')$$

$$N(a, Q) \leq 0 \quad (5')$$

$$H'(S, t, p) \leq 0 \quad (6')$$

$$S - S'(a, Q) \leq 0 \quad (7')$$

$$\min_{i \in I} \{\Lambda, v_i^j(\cdot), \Lambda\} \geq \bar{v} \quad \text{for all } j \in J \quad (9)$$

部分問題 P-2

$$\max_{a,t} H(e,a,t,p) \quad (1'')$$

st.

$$S^* - S(e,a,Q) \leq 0 \quad (7'')$$

$$e - e(a,b) \leq 0 \quad (8'')$$

1)の「地域防災計画」の計画案については、カタストロフ回避は式(9)で考慮されていることを前提として、MPEC のフレームで決定するには、図*-1 のようなプロセスで考える。その際に可能な限り多数の計画代替案を作成して、その中での最善案を選択する。

2)の個々の構造物についての耐震設計あるいは、部分問題 P-2 の目的関数が社会的純便益の一部を構成しているとは見なし、費用便益分析で対応する。個々の構造物について CBA を行うのが困難であれば、目的関数 H の値を一定値の基準値として a を決定する。ただし、システムの性能と目的関数の値 (S,H) から個別の構造物の性能や設計案への対応は一意に決まらない(ill-posed inverse problem)であるので、Inverse Problem のように他の criteria を追加して一意的な問題に修正する必要がある。

4. MPECモデルの道路ネットワークの最適耐震設計問題への適用

4.1 概要

I. 道路ネットワークの最適耐震設計問題は、期待社会的余剰を最大化するように各リンクの設計変数(レベル I とレベル II の想定地震動、許容最大応力等)を決定する数理最適化問題として定式化される。

II. 一般に最適耐震設計問題は大規模な問題になる可能性があり、解法も複雑であることが予想される。そのため、問題を地域防災計画レベルの計画問題と個別リンクの設計問題の二段階問題に修正して分解的に解くなどの工夫も試みなければならない。ただし、そのような問題の修正による対応は I の厳密な最適設計問題の簡略化であるため、いくつかの地域については厳密な最適設計問題の解と二段階問題のそれを比較検討して有効性を確認しておかなければならない。

III. 最適耐震設計問題は地域の社会経済特性の空間的分布と道路のネットワークに依存しているため、その解は対象地域により異なる。複数の地域について最適耐震設計問題のアプローチを適用して解を蓄積し、それに基づいて、個別のリンクの局所的な

物理条件(地盤条件等)と社会経済特性(平常時交通需要等)と個別構造物の設計変数を関係付ける(計算式または読み取り表を作成)。

4.2 道路ネットワークの最適耐震設計問題の定式化

道路ネットワークにおける交通均衡問題(例えば, 土木計画学研究委員会編(1998)を参照)の標準的な形式と最適ネットワーク問題(例えば, 朝倉(1988)などを参照)を参考として以下のように定式化される。

4.2.1 記号の定義

地震動の定義

$e \in \mathbf{R}_+^M$: 地震動を表わすベクトル

$P(e) \in [0,1]$: 地震動 e の生起確率

交通の需要側要因の定義

$\Omega \in \mathbf{R}^N$: 交通の需要側要因

$\Pr(\Omega|e) \in [0,1]$: 地震動 e が生起した場合の交通の需要側要因 Ω が生じる確率

交通ネットワークの定義

$i \in \mathbf{N}$: ノードのラベルとその集合

$(i, j) \in \mathbf{L}$: リンクのラベルとその集合

$K = (K_{ij}) \in \mathbf{R}_+^{\#L}$: 各リンクの容量からなるベクトル

$t = (t_{ij}) \in \mathbf{R}_+^{\#L}$: 各リンクの所要時間からなるベクトル

$x = (x_{ij}) \in \mathbf{R}_+^{\#L}$: 各リンクの交通量からなるベクトル

$t(x_{ij}, K_{ij}) : (x_{ij}, K_{ij}) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \text{ at } t_{ij} \in \mathbf{R}_+ : \text{リンク } (i, j) \text{ において容量 } K_{ij}, \text{ 交通量 } x_{ij} \text{ の場合の所要時間を与えるパフォーマンス関数}$

各リンクの物理的構造の定義

$a_{ij} = (a_{ij}^g) \in \mathbf{R}^G$: リンク (i, j) の物理特性を表わす変数からなるベクトル

$a = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{G \times \#L}$: a_{ij} からなるベクトル

$b_{ij} = (b_{ij}^{g'}) \in \mathbf{R}^{G'}$: リンク (i, j) の設置場所の物理特性を表わす変数からなるベクトル

$b = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{G' \times \#L}$: b_{ij} からなるベクトル

$\Pr(K|e, a, b) \in [0,1]$: ネットワークの物理的特性 a , 設置場所の物理的特性 b の場合に地震動 e が生起した場合に交通容量が K である確率

交通ネットワーク均衡の定義

$e_t(K, \Omega) : (K, \Omega) \in \mathbf{R}_+^{\#L} \times \mathbf{R}_+^{\#L} \text{ at } t \in \mathbf{R}_+^{\#L} : \text{各リンクの均衡所用時間からなるベクトル}$

$e_x(K, \Omega) : (K, \Omega) \in \mathbf{R}_+^{\#L} \times \mathbf{R}_+^{\#L} \text{ at } x \in \mathbf{R}_+^{\#L} : \text{各リンクの均衡交通量からなるベクトル}$

交通の利用者余剰

$CS(e_t(K, \Omega), e_x(K, \Omega), \Omega) : (t, x, \Omega) \in \mathbf{R}_+^{\#L} \times \mathbf{R}_+^{\#L} \times \mathbf{R}_+^N$ $aCS \in \mathbf{R}$: 需要要因 Ω のもとで交通ネットワーク均衡 $t = e_t(K, \Omega)$, $x = e_x(K, \Omega)$ が実現した場合の交通利用者の消費者余剰

交通ネットワークへの耐震投資費用

$c_{ij}(a_{ij}, b_{ij}) : (a_{ij}, b_{ij}) \in \mathbf{R}^G \times \mathbf{R}^{G\beta}$ $a_{ij} \in \mathbf{R}_+$: リンク (i, j) を物理的条件 a_{ij} , b_{ij} で供給するための費用

4.2.2 交通利用者の期待消費者余剰

均衡条件折込み形式

$$ECS(a, b) = \int_{e \in \mathbf{D}_e} \int_{\Omega \in \mathbf{D}_\Omega} \int_{K \in \mathbf{D}_K(e)} CS(e_t(K, \Omega), e_x(K, \Omega), \Omega) \Pr(K|e; a, b) \Pr(\Omega|e) dK d\Omega de$$

4.2.3 最適耐震設計問題

均衡条件折込み形式

$$\max_a ECS(a, b) - \sum_{(i,j) \in \mathbf{L}} c_{ij}(a_{ij}, b_{ij})$$

MPEC(均衡制約付き最適化問題)形式

$$\max_{a, x, t} \int_{e \in \mathbf{D}_e} \int_{\Omega \in \mathbf{D}_\Omega} \int_{K \in \mathbf{D}_K(e)} CS(t, x, \Omega) \Pr(K|e; a, b) \Pr(\Omega|e) dK d\Omega de - \sum_{(i,j) \in \mathbf{L}} c_{ij}(a_{ij}, b_{ij})$$

$$\text{s.t.} \quad \Theta(x, t, K, \Omega) \geq 0 \quad \text{for all } (K, \Omega) \in \mathbf{D}_K \times \mathbf{D}_\Omega$$

この目的関数は期待社会的余剰であるが、交通量と所要時間の分布は制約条件である交通均衡問題に制約されている。

4.3 費用便益分析および耐震設計指針の位置づけ

(1) 費用便益分析の位置づけ

ネットワーク全体での費用便益分析

$$SNB(a^a \rightarrow a^b; b) = \int_{a^a \rightarrow a^b} \{D_a(ECS(a, b)) - \sum_{(i,j) \in L} D_{a_{ij}} c_{ij}(a_{ij}, b_{ij})\} da \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 0$$

個別リンクについての費用便益分析

$$SNB(a_{ij}^a \rightarrow a_{ij}^b; a_{-ij}, b) = \int_{a_{ij}^a \rightarrow a_{ij}^b} \{D_{a_{ij}}(ECS(a, b) - c_{ij}(a_{ij}, b_{ij}))\} da_{ij} \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 0$$

個別リンクについての費用便益分析も他のリンクの設計変数の想定 (a_{-ij}) に依存している。そのため、個別リンクの費用便益分析を実施する場合には、 a_{-ij} の想定についての共通ルールを決めておく必要がある。

(2) 耐震設計指針の位置づけ

写像としての耐震設計指針

$$a = R(b, \Phi) : (b, \Phi) \in \mathbf{R}^{G^\# \times \#L} \times \mathbf{R}^N \quad aa \in \mathbf{R}^{G \times \#L}$$

$$R(b, \Phi) = (R^S(b_{ij}, \Phi_{ij})) \in \mathbf{R}^{G \times \#L}$$

$$a_{ij} = R^S(b_{ij}, \Phi_{ij}) : (b_{ij}, \Phi_{ij}) \in \mathbf{R}^{G^\#} \times \mathbf{R}^n \quad aa_{ij} \in \mathbf{R}^G$$

ここで、 Φ_{ij} : リンク (i, j) に特に関係する交通需要要因だけからなるベクトル、である。写像 R^S はリンク設置場所の物理的条件 b_{ij} と当該リンクに特に関係する交通需要要因 Φ_{ij} にリンクの物理的条件としての設計変数を対応させる。具体的には、計算式であっても良いし、定義域と範囲を離散化して読み取り表として表わしても良い。

耐震設計指針の策定問題の一例

Find a function $R^s(\cdot)$ such that

$$\sum_{(i,j) \in L} \|a_{ij}^* - R^s(b_{ij}, \Omega_{ij})\|^2 \leq \sum_{(i,j) \in L} \|a_{ij}^* - R^{s'}(b_{ij}, \Omega_{ij})\|^2 \quad \text{for all } R^{s'} \in \mathbf{D}_R$$

$$\text{where } a^* = \arg \max_a ECS(a, b) - \sum_{(i,j) \in L} c_{ij}(a_{ij}, b_{ij})$$

この問題は最適耐震設計問題の解を外的基準として耐震設計指針を表わす写像を最小自乗基準で推定することを意味している。複数の地域について既に最適耐震設計問題が解かれていれば、それらをプールして外的基準として用いることができる。

【付記】

本資料の作成には小林潔司(京都大学), 横松宗太(京都大学大学院)の両氏の協力を得ている。

上田孝行 (岐阜大学)

【参考文献】

1)Luo, Z.-Q., Pang, J.-S. and Ralph, D.(1996), *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press

2)土木計画学研究委員会編(1998), *交通ネットワークの均衡分析*, 丸善書店
朝倉康夫(1988)