

四辺形・六面体のノード再配置法による有限変形計算法

--- Helmholtz 分解に基づく固体の直交格子法 ---

目的: 桁落ち誤差を排除する, 有限変形計算に耐え得る, ロバストなスキームの構築

2020応用力学シンポジウム
オンライン・シンポジウム
P01-11
imi 計算工学研究室
今村 純也

$\nabla \mathbf{u}$ の対角項も和分解して表す: $2\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{1} = \begin{Bmatrix} (\alpha + \beta)_1 + (\gamma - \omega)_3 + (\gamma + \omega)_2 \\ (\gamma + \omega)_3 + (\alpha + \beta)_2 + (\gamma - \omega)_1 \\ (\gamma - \omega)_2 + (\gamma + \omega)_1 + (\alpha + \beta)_3 \end{Bmatrix}$
 $\mathbf{u}$ 要素に $\{\phi, \psi\}, \{\Phi, \Psi\}$ 要素の自由度を加えて,
 $\nabla \nabla \mathbf{u}$ の St. Venant's strain condition にも対処する.

$$\text{ただし, } \alpha_i \equiv \text{imi} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}}, \quad \gamma_i \equiv \text{shru} \equiv \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i-1}}$$
$$\beta_i \equiv \text{nai} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}}, \quad \omega_i \equiv \text{curl} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i-1}}$$

添え字は $(i=1,2,3) (i+1=2,3,1) (i-1=3,1,2)$ を適用 $\therefore i+2=i-1, i-2=i+1$

3次元(3D)を, 2次元モデル(2Dm)で計算する;

$\mathbf{u}$ で表せば $\text{shru} = \nabla^2 \mathbf{u}$.

$$\text{2Dm: } 2\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{1} = \begin{Bmatrix} (\alpha + \beta) + (\omega + \gamma) \\ (\omega - \gamma) + (\alpha - \beta) \end{Bmatrix}, \quad \text{where } \begin{cases} \alpha \equiv \text{imi} \Phi \equiv \nabla^2 \Phi^{(10)} + \Phi^{(01)}, & \omega \equiv \text{curl} \Psi \equiv \nabla^2 \Psi^{(01)} + \Psi^{(10)} \\ \beta \equiv \text{nai} \Phi \equiv \Phi^{(10)} - \Phi^{(01)}, & \gamma \equiv \text{shr} \Psi \equiv \Psi^{(01)} - \Psi^{(10)} \end{cases}$$

スカラーも $\{\phi, \phi, \phi\}$ としてベクトル演算子で表示.

2Dm subroutine subA を call subA($\langle x-y \rangle$, z データ) すれば 2D 計算.

更に call subA($\langle y-z \rangle$, x データ)

call subA($\langle z-x \rangle$, y データ) すれば 3D 計算となる

非圧縮成分計算式 ($\nu \leq 0.5$): $G \nabla^2 \mathbf{u}^I = 0$

圧縮成分計算式 ($\nu < 0.5$): $G(2\nabla_{diag}^2 + \frac{2\nu}{1-2\nu} \nabla \text{div})(\mathbf{u}^C + \mathbf{u}^I) = 0$
(以下では説明省略.)

Helmholtz 表示の残差 $\mathbf{R}_\nabla$: $2\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{1} - (\text{imi} \Phi_\alpha + \text{nai} \Phi_\beta) - (\text{curl} \Psi_\omega + \text{shr} \Psi_\gamma) = 2\mathbf{R}_\nabla$

提案のポイントは, $\{\phi, \psi\}$ 要素を, 適合COC (Center of the Cell) 要素で表示する点にある.

適合COC 要素:
(Center of the Cell) $f_{COG} = \{f^{(00)}\}_{COG} \{1 - \frac{x^2}{h_x^2}\} \{1 - \frac{y^2}{h_y^2}\} \{1 - \frac{z^2}{h_z^2}\}$ (h_i は要素幅の1/2.)

数値計算: ① 先ず, $\mathbf{u}$ の対角項とその共役変数を, COC要素: $\{\phi\}_{COC}$ に掬い上げる!

$$\Phi_{COC,\alpha} \leftarrow (\text{imi} \nabla (\Phi_{COC} - \mathbf{u}) \Rightarrow 0), \quad \Phi_{COC,\beta} \leftarrow (\text{nai} \nabla (\Phi_{COC} - \mathbf{u}) \Rightarrow 0)$$

② 次いで, $\mathbf{u}$ の非対角項とその共役変数を, COC要素: $\{\psi\}_{COC}$ に掬い上げる!

$$\Psi_{COC,\omega} \leftarrow (\text{curl} \omega - \text{shru}) \Rightarrow 0, \quad \Psi_{COC,\gamma} \leftarrow (\text{shr} \omega - \text{curl} \mathbf{u}) \Rightarrow 0, \quad \text{かつ, } \Psi_{COC}^{(001)} \leftarrow \Phi_{COC}^{(001)}$$

③ $\mathbf{u}$ 要素の仮想仕事式を, それらCOC要素の勾配で, 最小2乗式で制約する.

上述①~③を, 荷重増分ステップ n で, 収束するまで反復計算する. (圧縮計算法は説明省略.)

残差 $\mathbf{R}_\nabla$ の他, $\{\phi, \psi\}$: $\mathbf{u}$ の残差 $\mathbf{R}$ の計算も同様に行う. ($\mathbf{R}_\nabla$ と $\mathbf{R}$ は重み付き評価.)

有限変形はアイソメ要素と直交格子で写像計算して行く. 初期アイソメ要素には境界形状をセット.
一言では“固-気混相流の数値計算”が可能なロバストな解法