

非硬化塑性ひずみ領域を導入した拡張下負荷面モデルの 完全陰的応力計算法の開発

Fully implicit stress-update algorithm for extended subloading surface model incorporating nonhardening plastic strain region

井口 拓哉 (東北大・工) 佐藤 大貴 (東北大・工) 羅 家驊 (東北大・工) 山川 優樹 (東北大・工)

Takuya Iguchi, Taiki Sato, Jiahua Luo, Yuki Yamakawa (Tohoku University)
FAX: 022-795-7418, E-mail: takuya.iguchi.s4@dc.tohoku.ac.jp

In this study, a novel implicit stress-update algorithm of the subloading surface model, a class of unconventional plasticity modes, incorporating the nonhardening plastic strain region is developed to improve the predictive capability for cyclic loading property. Ohno (1982; J. Appl. Mech., ASME) proposed an improved plasticity model equipped with nonhardening plastic strain region in order to reproduce the stagnation of isotropic hardening resulting in transient stabilization of hysteresis loop during cyclic loading with a fixed strain amplitude. In the plastic strain space, when the plastic strain moves inside the region, isotropic hardening does not proceed, while only kinematic hardening proceeds, and hence the region does not expand. When the plastic strain moves outside of the nonhardening region, isotropic hardening proceeds being accompanied by expansion of the region. As a specific prototype model, von Mises plasticity model is reformulated based on the hyperelastic constitutive equations within the framework of infinitesimal deformation theory. A numerical algorithm for stress calculation using return mapping is developed, in which we devise a novel scheme consisting of scheme consisting of hardening/nonhardening judgment, substep technique, and nested iteration to update variables associated with nonhardening plastic strain region.

1. はじめに

金属材料に一定のひずみ振幅で繰返し負荷を行うと、載荷サイクルごとに硬化が進行し、やがて定常なヒステリシスループに近づく。この現象はヒステリシスループの安定化と呼ばれる。その後ひずみ振幅を変え再度繰返し負荷を行うと、先ほどとは異なる降伏応力で硬化が飽和し、ループが安定化する。Ohno¹⁾は上記の挙動を繰返し負荷における等方硬化の停滞によるものと考え、これを弾塑性構成則で再現することを目的として非硬化塑性ひずみ領域を提案した。これは具体的に、塑性ひずみ空間において、等方硬化が発展せず移動硬化のみが発展する領域を規定したものである。非硬化塑性ひずみ領域の適用例は文献²⁾などにより報告されている。しかしながら、大きなひずみ増分による計算でも精度の低下を抑えることができる陰的アルゴリズムによる計算法は開発されていない。

そこで本研究では、非硬化塑性ひずみ領域を導入した弾塑性構成則の完全陰的応力計算法を開発する。さらに本研究では、弾塑性構成則において、下降伏状態における塑性ひずみの進展や逆負荷・再負荷特性などを精緻に表現する拡張下負荷面モデル³⁾を導入する。具体的には、井口ら⁴⁾による超弾性構成則をベースとした von Mises 型拡張下負荷面モデルの定式化に対して、非硬化塑性ひずみ領域を導入して構成則を再定式化する。その際、移動硬化に関する塑性ひずみエネルギーのエネルギー貯留部と消散部への加算分解を用いて背応力の速度形構成式を求め、等方硬化と移動硬化の発展程度の釣合いにより移動硬化の背応力に関する硬化係数を求める。そして再定式化した構成則に対して、リターンマッピングによる応力計算アルゴリズムを開発する。本研究で提案するリターンマッピング法では、従来の手続きに加えて、非硬化塑性ひずみ領域による硬化・非硬化の判定と諸量の更新をリターンマッピングの内部の過程で反復的に行うという新たな手続きを導入する。

2. 構成則の定式化

非硬化塑性ひずみ領域を表す関数は、領域の半径を ρ 、中心を β とすると、以下のように定義できる。

$$g_{\text{nr}}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta}, \rho) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\beta}\| - \rho \leq 0 \quad (1)$$

また、 ρ 、 $\boldsymbol{\beta}$ の発展則を以下のように定義する。

$$\dot{\rho} = \lambda \gamma_{\rho}, \quad \gamma_{\rho} = \sqrt{\frac{2}{3}} c^{\text{nr}} \Gamma^{\text{nr}}, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \lambda \gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \quad \gamma_{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (1 - c^{\text{nr}}) \Gamma^{\text{nr}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\beta}}{\rho} \quad (3)$$

ここで、 c^{nr} は非硬化塑性ひずみ領域の発展係数である。また、 Γ^{nr} は硬化に関する塑性内部状態変数の関数で、本研究では硬化発展則関数と呼ぶ。その具体形は以下の通りである。

$$\Gamma^{\text{nr}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\beta}}{\rho} : \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\lambda}, & g_{\text{nr}} = 0 \text{ and } \frac{\partial g_{\text{nr}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p > 0 \\ 0, & g_{\text{nr}} < 0 \text{ and } \frac{\partial g_{\text{nr}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

次に、硬化発展則関数 Γ^{nr} を用いて硬化に関するひずみの発展則を考える。等方硬化は現塑性ひずみ点が非硬化塑性ひずみ面に達した時のみ発展する。そこで等方硬化に関するひずみ変数 ξ の発展則を以下のように定義する。

$$\dot{\xi} = \lambda \gamma_{\xi}^p, \quad \gamma_{\xi}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \Gamma^{\text{nr}} \quad (5)$$

ここで、式 (4) より硬化発展則関数 $\Gamma^{\text{nr}} = 1$ のとき、等方硬化の発展は停滞しない。一方で、 $0 \leq \Gamma^{\text{nr}} < 1$ のとき等方硬化の発展が停滞する。

移動硬化に関する塑性ひずみの発展則を以下のように定義する。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{kd}}^p = \lambda \gamma_{\text{k}}^p, \quad \gamma_{\text{k}}^p = \frac{b_{\text{k}}}{G_{\text{k}}} \boldsymbol{\alpha} \quad (6)$$

ここで、現塑性ひずみ点が非硬化塑性ひずみ領域内を移動する時、背応力 $\boldsymbol{\alpha}$ はより急激に発展し、等方硬化に関するひずみ ξ は発展しない。このことを表現するために

背応力に関する硬化係数 G_k を以下のように定義する。

$$G_k = G_{k0} + \frac{2}{3}(1 - \Gamma^{\text{nr}}) \frac{\partial q}{\partial \xi} \quad (7)$$

その他の内部変数の発展則は紙面の都合上省略する。

3. リターンマッピングアルゴリズム

応力更新計算を行うための負荷判定法を以下に示す。これは一般的な弾塑性モデルのリターンマッピングにおける負荷判定法を下負荷関数 f_{sub} に適用したものである。

$$\begin{cases} f_{\text{sub},n+1}^{(\text{tri})} \leq 0 \text{ or } f_{\text{sub},n+1}^{(\text{ela}),(\text{tri})} \leq 0 & \sim \text{弾性除荷・中立} \\ f_{\text{sub},n+1}^{(\text{tri})} > 0 \text{ and } f_{\text{sub},n+1}^{(\text{ela}),(\text{tri})} > 0 & \sim \text{塑性負荷} \end{cases}$$

上式で弾性除荷・中立と判定された場合は、試行値をそのまま更新値として採用する。上式で塑性負荷と判定された場合はリターンマッピングを行い更新値を求める。その際、非硬化塑性ひずみ領域による硬化・非硬化の判定と諸量の更新をリターンマッピングの過程で反復的に行う。

非硬化塑性ひずみ領域を用いた硬化・非硬化の判定は、**Fig. 1** のように塑性ひずみの試行値 $\epsilon_{n+1}^{\text{p},(\text{tri})}$ が領域内にあるか、面上にあるか、また更新値 $\epsilon_{n+1}^{\text{p}}$ が領域内ないし面上にあるか、領域外にあるかを次式を用いて判定する。

$$\begin{cases} g_{\text{nr}}(\epsilon_{n+1}^{\text{p},(\text{tri})}) \leq 0 \text{ and } g_{\text{nr}}(\epsilon_{n+1}^{\text{p}}) \leq 0 & \sim \text{第(1)節} \\ g_{\text{nr}}(\epsilon_{n+1}^{\text{p},(\text{tri})}) = 0 \text{ and } g_{\text{nr}}(\epsilon_{n+1}^{\text{p}}) > 0 & \sim \text{第(2)節} \\ g_{\text{nr}}(\epsilon_{n+1}^{\text{p},(\text{tri})}) < 0 \text{ and } g_{\text{nr}}(\epsilon_{n+1}^{\text{p}}) > 0 & \sim \text{第(3)節} \end{cases}$$

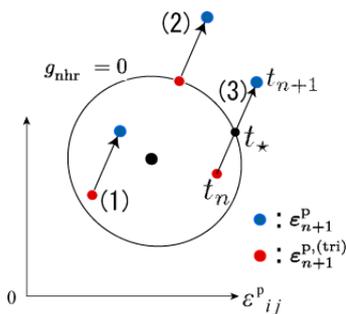


Fig. 1 非硬化塑性ひずみ領域による判定

(1) 区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で非硬化

このとき非硬化塑性ひずみ領域は拡大しないため、非硬化塑性ひずみ領域は以下の通りである。

$$\rho_{n+1} = \rho_{n+1}^{(\text{tri})}, \beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{(\text{tri})}, \Gamma_{n+1}^{\text{nr}} = 0 \quad (8)$$

(2) 区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で硬化

このとき非硬化塑性ひずみ領域は拡大、平行移動する。そこで区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で積分された式(2), (3)と非硬化塑性ひずみ領域(1)を連立させた式(9)をNewton-Raphson法を用いて反復的に解き $\rho_{n+1}, \beta_{n+1}, \Delta\lambda_*, \Gamma_{n+1}^{\text{nr}}$ を求める。

$$\begin{cases} Y_1 := \rho_{n+1} - \rho_{n+1}^{(\text{tri})} - \Delta\lambda_* \gamma_\rho = 0 \\ Y_2 := \beta_{n+1} - \beta_{n+1}^{(\text{tri})} - \Delta\lambda_* \gamma_\beta = \mathbf{0} \\ Y_3 := \sqrt{\frac{2}{3}} \|\epsilon_{n+1}^{\text{p}} - \beta_{n+1}\| - \rho_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

(3) 区間 $[t_n, t_{n+1}]$ 内で非硬化から硬化へ遷移

このとき **Fig. 1** 中の区間 $[t_*, t_{n+1}]$ を非硬化区間 $[t_n, t_*]$ と硬化区間 $[t_*, t_{n+1}]$ へと分解し、それぞれの区間において以下の手順で諸量を更新する。ここで非硬化から硬化

へ遷移する時点を t_* ($t_n < t_* < t_{n+1}$) と定義している。

a) 非硬化塑性ひずみ領域の更新値と塑性乗数の分解

第(2)節と同様に、現塑性ひずみ点に追従するように式(9)を反復的に解き非硬化塑性ひずみ領域の更新値を求める。ただし、ここでの $\Delta\lambda_*$ は塑性乗数の非硬化塑性ひずみ領域の拡大に寄与する部分、すなわち塑性乗数の硬化部 $\Delta\lambda_{\text{hr}} = \Delta\lambda_*$ である。したがって塑性乗数の非硬化部は以下の通りである。

$$\Delta\lambda_{\text{nr}} = \Delta\lambda - \Delta\lambda_{\text{hr}} = \Delta\lambda - \Delta\lambda_* \quad (10)$$

b) 非硬化区間 $[t_n, t_*]$ の連立方程式

塑性乗数の非硬化部 $\Delta\lambda_{\text{nr}}$ 用いて、区間 $[t_n, t_*]$ のリターンマッピング方程式を立てる。非硬化区間であるため、式(7)には $\Gamma^{\text{nr}} = 0$ を用いる。

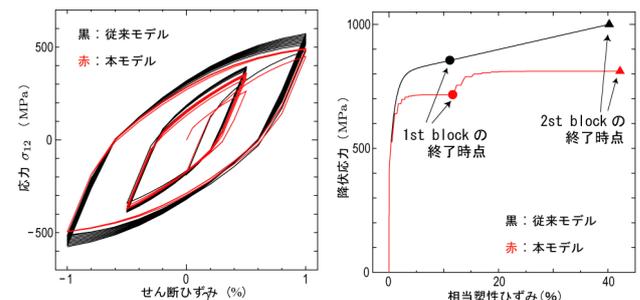
c) 硬化区間 $[t_*, t_{n+1}]$ の連立方程式

時刻 t_* の塑性ひずみ諸量を用いて、硬化区間 $[t_*, t_{n+1}]$ のリターンマッピング方程式を立てる。式(7)には第a)節で求めた Γ_{n+1}^{nr} を用いる。

4. 数値計算例

ひずみ振幅 $[-1\%, 1\%]$ の繰返し単純せん断を10サイクル与えた(1st block)後、より大きなひずみ振幅 $[-2\%, 2\%]$ で10サイクル与える(2nd block)解析を行う。ここで、 ρ の初期値が0かつ $c^{\text{nr}} = 0$ の場合、式(2)より非硬化塑性ひずみ領域は拡大せず、従来の拡張下負荷面モデルと一致する。したがって、このように設定した従来のモデルと、非硬化塑性ひずみ領域を導入した本手法とを比較する。解析結果を **Fig. 2** に示す。**Fig. 2** より、従来モデルでは相当塑性ひずみの進行に伴い降伏応力が上昇しているが、本構成モデルではblock毎に降伏応力の上昇が一旦停滞していることがわかる。

このように本手法の導入により、一定なひずみ振幅で繰返し負荷を行うと、非硬化塑性ひずみ領域は徐々に拡大し塑性ひずみ振幅範囲の全体を占め、等方硬化の停滞が表現可能となる。



(a) 応力-ひずみ経路 (b) 降伏応力-相当塑性ひずみ関係

Fig. 2 本構成モデルと従来モデルとの比較

参考文献

- Ohno, N.: A constitutive model of cyclic plasticity with a non-hardening strain region, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 49, pp. 721-727, 1982.
- Ohno, N.: Material models of cyclic plasticity with extended isotropic hardening: a review, *Mechanical Engineering Reviews, JSME*, Vol. 2, No. 1, p. 14-00425, 2015.
- Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, pp. 917-945, 1989.
- 井口拓哉, 山川優樹, 池田清宏: 微小変形理論と超弾性構成則に基づく拡張下負荷面モデルの再定式化とリターンマッピング法の開発, *日本機械学会論文集*, Vol. 82, No. 841, p. 16-00197, 2016.