

四辺形・六面体のノード再配置法による有限変形計算法 A numerical scheme for finite strain theory by adaptive nodal relocation (ANR) method for quadrilateral / hexahedron

今村 純也 (imi 計算工学研究室)

Junya IMAMURA, imi Computational Engineering Laboratory

FAX: 048-465-8148, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp

The objective of this study is to establish a numerical scheme for solid represented by Helmholtz decomposition ($H-d$). Based on the $H-d$, arbitrary vector field V can be represented using scalar potential ϕ and vector potential ψ as follows, i.e. $V = \nabla \phi + \text{curl} \psi$ ($\text{div} \psi = 0$). In a previous report, I proposed an improved Helmholtz decomposition ($iH-d$) for displacement vector u ; i.e. $u = \nabla \phi + \nabla \phi^I + \text{curl} \psi$ ($\nabla^2 \phi^I = 0$, $\text{div} \psi = 0$), and $\nabla \psi \cdot I = \nabla^2 \psi$, where ψ is potential but has a similar dimension to u . By numerical model based on the finite deformation theory, the nodes must follow the Lagrangian tracking. This report proposes an adaptive nodal relocation (ANR) method, where the distortional term in the function of hexahedron play an important role for the nodal relocation. The objective to represent in $iH-d$ is to avoid so-called numerical Locking.

1. 研究の目的と背景・課題

本稿では直交格子法をベースとして、有限変形計算のための、四辺形・六面体へのアダプティブ r 法の適用法を示す。

その思考の原点は既報¹⁾の Locking-free 有限要素法に在る。すなわち、応力項の関数に方向性が在ってはならない、とするもので、ゆがみ項を無視する。ただ、適合するにはゆがみ項は必要で、その取扱い技法がメインテーマとなる。

本稿では有限変形後も、質量を保存するよう六面体ノードを(予測値・計算値から)再配置する方法(略称: ANR 法)を採る。

初期形状設定が容易な直交格子法を採り、そのセル質量を保存して行くスキームとする。

直交格子は 1 のノードに対し、応力には 8 の自由度の関数項が対応する、とも考え得る。

よって 8 以上の条件式を必要とし、回帰モデルの概念で、条件式の残差分散を最小化するようノード値を回帰する他ない。

8 の条件式は平衡式と St. Venant の適合条件式合計である。

それらはデカルト座標表示式の他、デカルト座標を回転した座標表示式で、合計 8 以上の条件式を設定する。

固体は一般に圧縮性である。ただ、せん断ひずみ γ と回転 ω は、形状変化は惹き起すが、体積変化は惹き起さない。体積変化は法線ひずみ(垂直ひずみ) ϵ によってのみ惹き起される。

かつ、Lateral(縦)成分を圧縮/非圧縮: $u^I = u^C + u^I$ に分離表示すれば、 u^C 成分のみによって惹き起される。 u^C は単独では計算できず、 $+u^I$ なる下駄を履かせて解く必要がある。

よって、非圧縮計算は圧縮/非圧縮に関わらず必須であり、 u^I を Transverse(横)成分 u^T に加えて非圧縮成分を解く。かつ、 $\text{div} u^I = 0$ が必須条件となり、これが非分離解法による有限変形計算では不可能で、体積保存できない現象となって顕れる。

本稿は、Helmholtz 分解($H-d$)に基づく連続体理論への有限要素法の適用に関する研究、の一環である。

既存の研究成果は 2D 流体の ψ - ω 法に限られると言っても過言ではない。数値計算法なしでは成書²⁾³⁾がある。

既報で非圧縮横成分を $\nabla \phi^I$ として、変位ベクトル場 u の修正表示式; i.e.: $u = \nabla \phi + \nabla \phi^I + \text{curl} \psi$ ($\nabla^2 \phi^I = 0$, $\text{div} \psi = 0$, $\nabla \phi^I = \nabla_{\text{diag}} \psi$) を提案し $iH-d$ (修正 $H-d$)と呼んでいる。($\nabla^2 \phi \neq 0$)

$\nabla_{\text{diag}} \psi$ は、後述するが、 $\nabla \psi$ の対角項。($\nabla_{\text{diag}} \psi \cdot I = \text{div} \psi$)

V がひずみベクトル場では、変数 $\nabla \psi \cdot I (= \nabla^2 \psi)$ を適用して分解表示する。 ψ はポテンシャルであるが u と同じ dimension を有す。

$\nabla^2 u$ は $\nabla \text{div} u$ を作用させてせん断形にも、回転形にも、代数的に変形できる。ただ、縦成分を横成分に変形するので、非圧縮成分に限られる。かつ、後述のように、 $\nabla \text{div} u$ は座標回転作用素であり、 $\nabla^2 u$ を座標回転して表すことに同じである。

その説明に Schwartz の鏡像の原理を使う。かつ、簡単な要素関数では、 $\pi/4$ ピッチで座標回転して計算すれば spurious 誤差を排除できる。いわゆる数値 Locking 対策である。その対策は“共役変数”のタームで括り得る。

本稿では $iH-d$ 表示法を固体に適用して数値計算する。要素関数は 3 重 1 次とする。(2D は双 1 次。)

固体は 2D モデルで計算可能な版や板の構造物が、むしろ一般的である。鏡像の原理の概念で 3D も、2D 計算の和として計算できる。そこで、2D 計算法を平面版の平面ひずみモデルの例で示す。3D への適用法はその説明後に、簡潔に述べる。

変形後も形状変化のない微小変形理論は、流体では閉空間問題に当たる。系全体では、質量も体積も保存される。

固体は自由界面問題であり、体積保存が課題となる。それが固体での有限変形理論の課題である。流体の自由界面問題と同じ課題であり、幾つかの手法が在る。

本稿では、メジャーとも言うべきノード再配置法を採る。

2. 修正 Helmholtz 分解による数値計算法

2.1 添え字記号と新しい演算子 添え字は($i=1, 2, 3$)のほか、($i+1=2, 3, 1$) ($i-1=3, 1, 2$)を適用する。すなわち、 $i+2=i-1$, $i-2=i+1$ である。

$\nabla_{\text{diag}} u$ は ∇u の対角項を、 $\nabla_{\text{offd}} u$ は非対角項を表し、 $\text{curl} u$ が非対角項の反対称テンソルを表すのに対し、 shru は対称テンソルを表すとし、 $\text{curl} u = \nabla \text{curl} u \cdot I$, $\text{shru} = \nabla \text{shru} \cdot I$ として、右辺ベクトル記号を定義する。 ∇^2_{diag} , ∇^2_{offd} , ∇^2_{curl} , ∇^2_{shr} はベクトルとなる。

スカラーにも、 $\{\phi, \phi, \phi\}$ としてベクトル演算子を適用する。

spurious 誤差対策のための演算子 2 つを式(1)で定義する。

$$imiu \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}}, \quad naiu \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \quad (1)$$

更に、 $imiu = \nabla_{imiu} \cdot I$, $naiu = \nabla_{naiu} \cdot I$ の右辺ベクトルを定義。

2.2 基礎方程式 計算は準静的とし、仮想時間を t で表す。時間軸に離散計算するための時間ピッチ Δt は、準静的載荷比

ッチとする。

変位を $\mathbf{u}$, 速度を $\mathbf{U}$, 密度を ρ , セン断剛性を G とし, 質量保存式を式(2)に, Navier-Stokes(NS)方程式を式(3)に示す。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (2)$$

$$\left\{ \rho \frac{D}{Dt} - G(2\nabla_{diag}^2 + shr^2 + \frac{2\nu}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div}) \right\} \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

分布荷重はゼロとして省略し, 集中荷重で考える。

分離表示では, 非圧縮成分の計算には式(3)応力項の体積ひずみ項を無視し, 圧縮成分の計算には横成分項を無視する, ことで簡潔に取り扱える。

2.3 共役変数 式(1)の, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ と $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ のように和と差で表される変数を互いに共役変数と呼ぶ。 $\operatorname{curl} \mathbf{u}$ と shru 或いは imiu と naiu である。

一方の数値計算には共役変数の最小化($\Rightarrow 0$)を付帯条件とする。(Coulomb ゲージ同様, ゲージと呼ぶ。)

いま $\nabla \operatorname{curl} \mathbf{u}$ 成分それぞれに $|e|$ が潜在しているが, $\operatorname{curl} \mathbf{u}$ の値は変わらない。ただ, $|e| \gg 0$ では $\nabla \operatorname{curl} \mathbf{u}$ は桁落ちし, shru も桁落ちする。よって $(\operatorname{shru} \Rightarrow 0)$ をゲージとし, $2|e| \Rightarrow 0$ とする。同様に, $\nabla \operatorname{shru}$ の桁落ち排除に $(\operatorname{curl} \mathbf{u} \Rightarrow 0)$ も必要。

2.4 iH-d と鏡像の原理の接点 2D のスカラー(流れ)関数 ψ を, 変位の単位の Ψ で考える。

スカラー変位 u は左手系表示とし, 3D の Ψ は右手系 X - Y - Z 座標とする。 Ψ は正対する鏡面には左手系として映る。

変位 v も入れ, $\{u, v\}$ を z 軸周りに $\pi/4$ 回転した s - n 座標では $\{\Phi, \Psi\}$ で表す(一致させる)。 3D の Ψ を Fig.1 のように n 軸周りに X - Y - Z 座標を含め, π 回転(折返)して表す。それは n - z 面内の鏡面に映る左手系の(奥行きのある)鏡像に一致し, 実像 $\{\Phi, \Psi, w\}$ にも一致する。

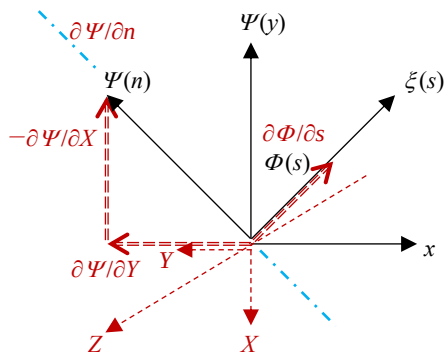


Fig. 1 Co-ordinate rotation and components of H-d

iH-d は, この実像と一致する左手系 X - Y - Z の鏡像で計算を進める。 Ψ は折返し線上に在るが, x - y 座標軸への投影量は $\{\partial \Psi / \partial y, -\partial \Psi / \partial x\}$ で, これに $\nabla \Phi$ を加えれば, $\nabla \mathbf{u}$ の s - n - z 座標表示(変換)形に一致する。

前述のように等方性の応力表示とし, 上述 $\pi/4$ 回転のほか, 剛体回転の共役変数となる $-\pi/4$ 回転座標でも表わして, 回帰計算して行くことで Locking-free 有限要素法となる。

上述 $\{\Phi, \Psi\}$ 法は, 3D では $\{\Phi, \Psi\}_i$ 法として, 2D の和として計算する。

3. ANR 法の平面版の例

3.1 概要 式(3)の $\mathbf{U}$ を $\mathbf{u}$ で置き換え, 時間積分式とする。準静的なので実質微分項を無視して, 微小変形計算する。解の変形を Δt で除して変形速度テンソルを表し, 式(3)に代入し,

時間軸は中央差分表示し, 時間ステップ $n+1$ のノード変位をパラメータとして, n 断面で仮想仕事式を解いて, $n+1$ のノード変位を求めて再配置して行く。

その解変位は, 移流項が軌跡接線方向(慣性力)などの理由で誤差を含み, 質量を保存しない。それを, 式(2)を満たすよう計算して再配置して行く。

3.2 COG 要素 応力項表示には, 双 1 次のゆがみ項 $\Psi^{(1)}$ を無視する。しかし適合には必要なので最小化する。最小化にはパラメータ自由度が必要で, 3 重 2 次要素の重心(Center of the Gravity)ノードのみ自由度, 他をすべて $=0$ に固定した COG 要素を加え, COG ノードのパラメータ自由度で最小化する。

3.3 平面版 3D 化を前提に, 平面ひずみモデルで考える。先ず非圧縮式(4)を Ψ で表わして, 前述のように解いて $\mathbf{u}'$ を求める。

$$G(\operatorname{curl}^2) \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

次いでポアソン比 $\nu < 0.5$ のケースでは, 圧縮式(5)の $\nabla \mathbf{u}$ に $(\nabla \Phi + \nabla \mathbf{u}')$ を代入し, $\nabla \Phi$ のノードパラメータ自由度で満たす。

$$-G(2\nabla_{diag}^2 + \frac{2\nu}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div}) \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

それらを用いて $n+1$ の予測子 $\mathbf{u}$ を計算し, ANR 法でノードを移動して, 質量保存するよう修正して行く。

式(5)は反復計算 ($m=0, 1, 2, 3, \dots$) の, $m-1$ ステップのゆがみ項(および外力)の仕事量を与え, 法線ひずみエネルギーを最小化するよう解く。

同時に, 質量保存式(6)を付帯させて解く。正の物理量である密度は $\rho = \exp(r)$ として, r を有限要素表示する。

$$G \int_{\Omega} (\delta \nabla \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} - \delta \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{r}}{Dt}) d\Omega = 0 \quad (6)$$

ρ の計算は双対格子を適用し, 3 重 1 次 $\rightarrow$ 3 重 3 次補間する技法⁴⁾で求める。(双対格子法は, 陰関数による境界形状表示にも適用。)

ベンチマークテスト問題として, 平面ひずみモデルの片持ちばりを採り挙げる。本法では剛体回転も入れて有限変形計算できる。

3.4 3D への拡張 x - y 面を z 方向 Gauss 積分点に設定して 2D 式を積分し, 3D プログラムとする。 $\operatorname{call} \operatorname{subA}(x$ - y 引き数)のみ計算すれば 2D 解を得る。 $\operatorname{call} \operatorname{subA}(y$ - z 引き数), $\operatorname{call} \operatorname{subA}(z$ - x 引き数) も続けければ, 3D 計算となる。

4. まとめ

荷重漸増モデルで NS 方程式を解くとした。重要なのは, 変形テンソル成分の自由度に見合う条件式を解くことであり, iH-d を適用して St.Venant の適合条件を満たした。

ゆがみ項対策の COG ノードが六面体適用のポイントである。

参考文献

- 1) 今村: 修正 Helmholtz 分解要素を用いる Locking-free FEM, 日本流体力学会年会 2019 講演論文集, (2019)。
- 2) A. E. H. Love: A Treatise on the mathematical theory of elasticity, Fourth edition, Dover Publications, 1927。
- 3) Y. C. Fung: 大橋 et al. 訳, 固体の力学/理論, 培風館, 1970。
- 4) 今村: 引力/界面張力モデル, 並びに粒子法による数値計算法, 数値流体力学シンポジウム, E09-2, 2018。