

応力均一化を実現する樹枝形状の理論探索 Exploring the Tree Branch Tapering under the Uniform Stress Axiom

市川 祐実 (山梨大院・生命環境)・佐藤 太裕 (北大院・工)・島 弘幸 (山梨大院・総合)

Yumi ICHIKAWA, University of Yamanashi

Motohiro SATO, Hokkaido University

Hiroyuki SHIMA, University of Yamanashi

FAX: 055-220-8834, E-mail: hshima@yamanashi.ac.jp

In the growth process of trees, a mechanical support function is indispensable for securing a stable structure that can withstand the own weight and wind pressure. A remarkable feature of trees is the stress uniform distribution; i.e., they grow their trunks and branches autonomously so that the stresses generated on the surface are uniform. But this established idea poses a following question: what shape of tree branches can achieve such a uniform stress distribution? In the present work, we have calculated the equilibrium state of a main branch, which was affected only by its own weight, within a small deformation range, and examined the effects of the branch tapering and cross-sectional shape variation on the deflection curve and stress distribution of the branch. We have found that the bending stress distribution can reach an almost uniform stress distribution under certain geometric conditions with respect to the outer shape.

1. はじめに

樹木の生育過程には、力学的支持・水分通道・静水圧・老化などの制限要因が影響していると考えられている。特に力学的支持による効果は、樹木が重力や台風による負荷に耐えられる構造を形成するために、必要不可欠である¹⁾。

正常な樹幹の内部には、縦の幹軸方向および横の半径方向(成長輪に垂直方向)と周囲方向(成長輪に接線方向)の3つの成長応力が作用している。例えば、周囲方向に沿った圧縮応力は、最外周の木部において最大となり、中心に向かって次第に小さくなる。中心からおおよそ半径の1/3だけ離れた付近では、応力もひずみもなくなる。そこからさらに内側に進むと、引張応力と伸びが次第に増加し、中心部で最大となる。こうした樹幹内部の応力分布は、樹木に種類にほぼ依存せず共通してみられる分布であり、樹木はこれらの応力を駆使して樹体を安全に支持している^{2)~4)}。さらに樹木は、力学的に最適化された構造をとるべく自律的に成長する。例えば樹幹は、成長応力によって自重を支えたり、風の影響に耐えるための予防措置をとっている。さらに、圧縮応力や引張応力を均一にさせる仕組みや、せん断応力を最小化させる仕組み等を獲得している。このように樹木は、太陽光エネルギーにより生成した光合成生産物をもとに、ごく最小限の材料を適所に配置することで、極めて安定性の高い構造を実現すると信じられている。こうした意味で、樹木の構造の力学的な完成度は、人工的に作られた技術製品や構造物を大きく凌ぐものであり、工学的設計や機械的要素の最適デザインに活用されている³⁾。

樹木の枝は、幹に比べ細く、葉や果実の重みを受ける。さらに、それらの体積は樹木の成長につれて増加するため、枝に加わる負荷も徐々に増し、くわえて繁茂した葉に作用する横風の負荷も次第に大きくなる。このような大きな力をうまく受け流すような機構がなければ、たちまち枝は折れてしまうだろう。したがって枝内部でも、やはり幹と同様に、応力を分散させる仕組みが内在していると予想される。枝も幹と同様の機構を持っているのだとすれば、樹木は自らの枝がどのくらいの負荷まで耐えることができるか知っていると考えられる。

そこで本研究では、枝の断面形状および幹からの分枝角度を様々に変化させ、各々の条件における枝のたわみ曲線と曲げ応力分布を計算した。これにより、枝表面の曲げ応力が均一となるための幾何学的条件を理論的に探索した。

2. 計算条件

実際の樹木には小枝や葉が複雑に繁茂しているが、本研究ではそれらを捨象し、幹から伸びた一本の主枝の自重一形態相関のみを考察した。研究の初期段階では、幹から水平に伸びた「片持ち梁」の状況を想定し、弾性近似の範囲でそのたわみ曲線と曲げ応力分布を計算した。

梁の長さを L 、梁の根元と先端における円形断面の半径をそれぞれ a と b とし、質量密度を μ とする。長手方向に x 軸をとり、この軸方向にそって梁の太さが線形に減る場合と、二次関数に従って減る場合の二通りを考える。前者の系における断面半径を $r_1(x)$ 、後者の半径を $r_2(x)$ で表し、各々を次の式で定義する。

$$r_1(x) = \frac{b-a}{L}(x-L) + b \quad (1)$$

$$r_2(x) = \frac{a-b}{L^2}(x-L)^2 + b \quad (2)$$

3. 計算方法

3-1. せん断力と曲げモーメント

せん断力(Q)と曲げモーメント(M)は以下の式に従う。

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad (3)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad (4)$$

ここで $q(x)$ は自重による下向き荷重であり、 $q(x) = \pi\mu g r^2(x)$ で定義される。

3-2. 曲げ応力

中立面から y だけ離れた位置における垂直応力 σ_x は、曲げモーメントと断面2次モーメント(I)を用いて次のように表せる。

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y \quad (5)$$

3-3. 梁のたわみ微分方程式

梁の中心線であるたわみ曲線 $y(x)$ は、断面2次モーメント、曲げモーメント、ヤング係数(E)と以下の関係で結ばれる。

$$M = -EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (6)$$

4. 結果と考察

4-1. 幹から垂直に伸びた枝

式(3)、(4)を用いて $M(x)$ を求め、それを式(6)に代入し、

積分することでたわみ曲線 $y(x)$ の解析解を得た。また、算出した $M(x)$ を式(5)に代入することで、曲げ応力 $\sigma(x)$ を算出した。二次細りモデルにおける結果を図1、2に示す。ただし各物性値は、 $E=10$ GPa、 $\mu=0.7$ g/cm³、 $L=1.0$ m、 $g=9.8$ m/s²、 $a=1.0$ cmとした。

たわみ曲線は細り方を変えても大幅な変化はなかった。しかし曲げ応力分布は、細り方に応じて全く違うグラフを描いた。特に二次細りモデルでは、枝の先端が尖っているとき、かなり一様な分布を示す結果となった。以上より曲げ応力分布は枝の細り方によって変化すると考えられる。

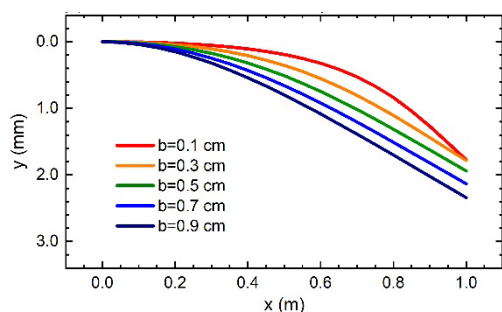


Fig. 1 Deflection curve of the parabolic tapering branch

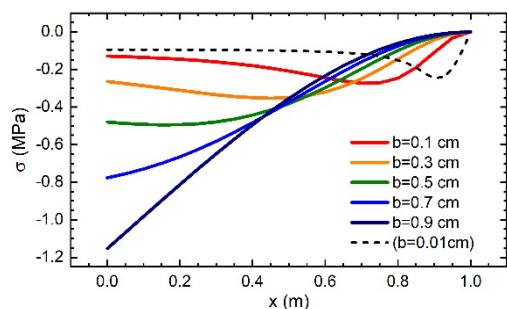


Fig. 2 Bending stress of the parabolic tapering branch

4-2. 幹から角度 θ で伸びた枝

現実の枝に対するたわみや応力分布を考察するためには、幹から水平に伸びた枝だけではなく、水平方向と一定の角度 θ をなす方向へ伸びた枝を想定する必要がある。この角度 θ の変化に伴い、たわみ曲線と曲げ応力分布がどのように推移するのかを検証する。

図3に示した紫色の実線の矢印は、幹から水平に伸びた枝を曲げた場合に生じる垂直応力を表す。この場合は中立面を境として、上方には梁を引張る力、下方には梁を圧縮する力が、均等な大きさと働く。しかし枝が幹からある角度をもって伸びる場合は、図3に赤色破線で示したように、中立面が変化する。すなわち荷重により発生した軸圧縮力が、曲げに起因する応力と重ね合わさることで、中立軸が枝の中心部から上方にずれる。従って、細り方や断面形状の変化が、たわみ曲線と曲げ応力分布に与える影響は、水平に伸びた主枝の場合と異なる。紙面の都合上、結果の詳細は当日のポスター講演に譲る。

水平に伸びた枝と、角度がついて伸びた枝との違いは、枝の根元における二次成長(太さ方向への肥大成長)にも影響すると推察される。たとえば前者においては、曲げモーメントのみが枝の根元に加わるため、その上側表面と下側表面が均等な二次成長を示す。従って枝の根元の断面は、建設目的で頻用されるI型断面に似た形状を示すであろう。いっぽう後者の場合は、軸力と曲げ荷重の両方が同時に加

わるため、根元の上側表面での成長が卓越すると期待される(図4参照)。こうした実際の樹木の成長過程との関連についても、当日のポスター講演で議論する。

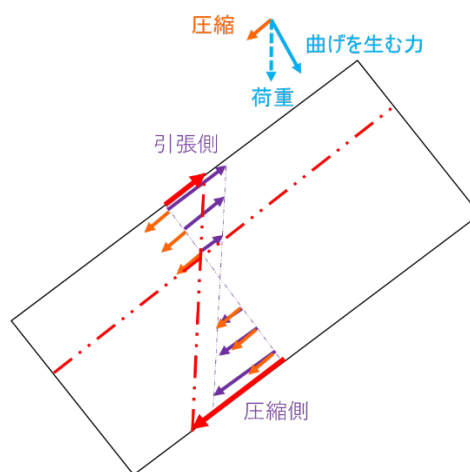


Fig. 3 Normal stress generation mechanism in oblique beam

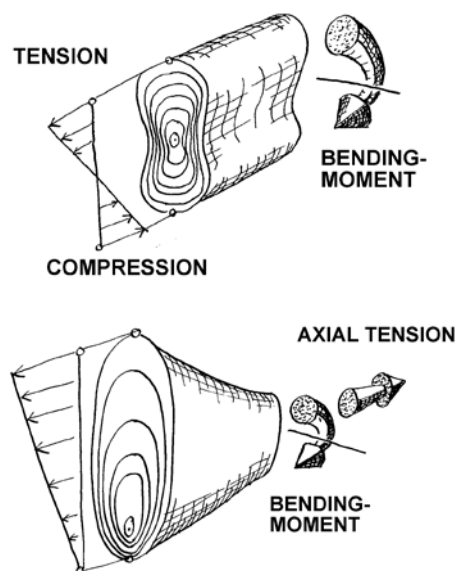


Fig. 4 Difference in the growth of branch root under different load conditions. After from Ref.[3]

謝辞

本研究は、科研費 18H03818, 19H05359, 19K03766 の支援を受けています。中垣俊之教授(北大)、井上昭夫教授(近大)、津川暁助教(NAIST)との有益な議論に深く感謝いたします。

参考文献

- 鍋嶋絵里・石井弘明, 樹高成長の制限とそのメカニズム, 日林誌, 90: 420-430, 2008.
- 渡辺治人, 樹幹の成長応力, 「材料」第12巻, 第121号, 709-713, 1963.
- C. Mattheck and I. Tesari, The mechanical self-optimisation of trees, Design and Nature II, 197-206, 2004.
- J. Morgan and Melvin G. R. Cannell, Shape of tree stems - a re-examination of the uniform stress hypothesis, Tree Physiology 14, 49-62, 1994.