『いまさら聞けない計算力学の常識』2012 in 東京 2012年12月4日

有限要素法の「常識」(流体編)

樫山和男(中央大学)

1. 流れ問題の特徴

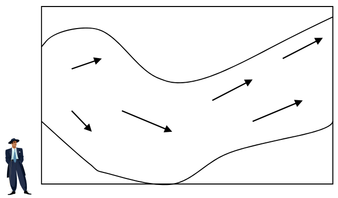
1.1 流れと物質の移流拡散問題(13話、14話)
流れの記述法
未知変数と支配方程式ー保存則(質量、運動量、エネルギー)
流れ・物質の移流拡散問題の物理現象の特徴

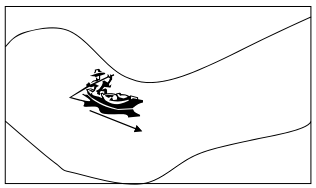
1.2 支配方程式の型と特徴(13話)
偏微分方程式の型と特徴
物理法則に従った離散化の必要性

流れの記述法

Euler的方法:空間の各点各瞬間の流体の状態量(流速・圧力密度)を固定座標系の位置と時間(x, y, z, t)の関数として記述する方法。(ある固定した視点から流れを観察する立場)

Lagrange的方法:ある流体粒子の時々刻々の位置を追跡し、これをその粒子の最初の位置と時間の関数として記述する方法。(ある流体粒子の視点から流れを観察する立場)





流れを記述する未知変数と方程式

運動学的状態を表す未知変数:u,v,w(速度成分)
内部状態を表す未知量:p(圧力), ρ(密度)

↕

流体の力学的変化を記述する方程式(支配方程式)
・質量保存則(式1本)
・運動量保存則(式3本)
・エネルギー保存則(式1本)

↓

未知数5つに対して、式が5つ成立するので未知数を決定することができる

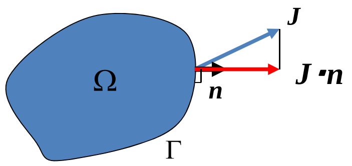
非圧縮性流体の場合には、密度が一定なので未知数が4つになる
→質量保存則と運動量保存則のみで未知数を決定することができる

保存則

「検査領域内で単位時間に発生する量」
－「検査領域境界面を通して単位時間に流出する量」
＝「検査領域内の単位時間当たりの増加量」

↓

$$\int_\Omega s\,d\Omega - \int_\Gamma \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\,d\Gamma = \frac{d}{dt}\int_\Omega \psi\,d\Omega$$



ψ:保存される物理量（単位体積あたりの量）
$\boldsymbol{J}$:物理量の流束（単位面積・単位時間あたりの量）
s:発生速度（単位体積・単位時間当たりの量）
$\boldsymbol{n}$:検査面境界の外向きの単位法線ベクトル

保存則

$$\int_\Omega s\,d\Omega - \underbrace{\int_\Gamma \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\,d\Gamma}_{\text{Gaussの発散定理}} = \frac{d}{dt}\int_\Omega \psi\,d\Omega$$

$$\int_\Omega s\,d\Omega - \int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{J}\,d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial t}\,d\Omega$$

$$\int_\Omega \left(s - \nabla\cdot\boldsymbol{J} - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\Omega = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = s$$ ：微分形の保存式

保存則による支配方程式の導出

質量保存則　$\psi = \rho, \quad \boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{u}, \quad s = q$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = q$$

運動量保存則　$\psi = \rho\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{T}, \quad s = \rho\boldsymbol{b}$

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{T}) = \rho\boldsymbol{b}$$

エネルギー保存則

$$\psi = \rho e, \quad \boldsymbol{J} = \rho e\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}, \quad s = \rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u} + \rho r$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}) = \rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u} + \rho r$$

$$e = \frac{1}{2}u^2 + \varepsilon$$

流体の分類

力学的に重要な流体の性質：圧縮性と粘性
→応力成分に関係

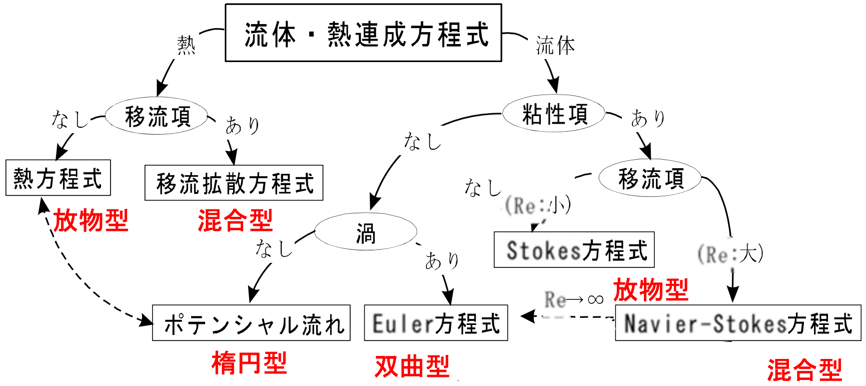
圧縮性(compressibility)：圧力によって体積が変化する性質
粘性(viscosity)：せん断変形速度に抵抗する性質

表－１　流体の分類

	圧縮性なし	圧縮性あり
粘性なし	非圧縮性非粘性流体（完全流体）	圧縮性非粘性流体
粘性あり	非圧縮性粘性流体	圧縮性粘性流体

↑
マッハ数：0.3程度
（流速が音速の0.3倍）

流れ・物質の移流拡散問題と支配方程式



支配方程式の型

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial t}+Fu+G=0$$

判別式

- $B^2-4AC<0$ ：楕円型
- $B^2-4AC=0$ ：放物型
- $B^2-4AC>0$ ：双曲型

平衡問題のように閉じた境界条件が関係する問題（定常問題）

・・・・楕円型

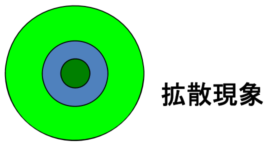
伝播問題のように開いた境界条件が関係する問題（非定常問題）

・・・・放物型or双曲型

物質の移流拡散問題

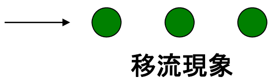
拡散方程式（放物型）

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}_{\text{拡散項}}=0$$



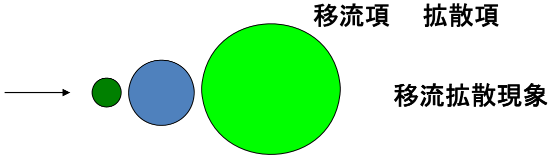
移流方程式（双曲型）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\underbrace{a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\text{移流項}}=0$$



移流拡散方程式（混合型）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\underbrace{a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\text{移流項}}-\underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}_{\text{拡散項}}=0$$



流れ問題

Stokes方程式（放物型）

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{\text{粘性項}}=f_i$$

・・・・粘性流体（遅い流れ）

Euler方程式（双曲型）

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\underbrace{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{移流項（非線形項）}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i$$

・・・・非粘性流体、渦あり流れ

Navier-Stokes方程式（混合型）

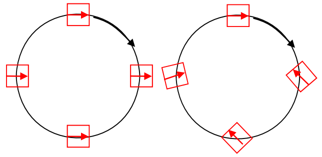
$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\underbrace{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{移流項}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{\text{粘性項}}=f_i$$

・・・・粘性流体

流れ問題

Laplace方程式
（楕円型）

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0$$



・・・・完全流体、渦なし流れ

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0$$

完全流体で、静止状態から発生した流れは渦なし流れ
（非粘性なので流体粒子を回転させる力が生じない）

方程式の共通性

$\boxed{\text{移流拡散方程式}}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f$$

混合型方程式

↓ 類似性が強い

$\boxed{\text{非圧縮性粘性流体解析（Navier-Stokes方程式と連続式）}}$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}=f_i$$

混合型方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$$

非圧縮粘性流れ（Navier-Stokes方程式）

$$\underbrace{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{慣性力項（双曲型）}}+\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{圧力項}}-\underbrace{\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{\text{粘性力項（放物型）}}=\underbrace{\rho b_i}_{\text{物体力項}} \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \quad \text{in } \Omega$$

流れの発生により生じる項

無次元化 ↓

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}=b_i \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \quad \text{in } \Omega$$

Reynolds数とは

慣性力 と 粘性力

の<u>大きさの比</u>を表す無次元のパラメータ

$$R_e=\frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}}=\frac{\rho U\partial U/\partial D}{\mu\partial^2 U/\partial D^2}\simeq\frac{U(UD^{-1})}{\nu(UD^{-2})}=\frac{UD}{\nu}$$

$$R_e\begin{cases}\text{小さい}\rightarrow\text{遅い流れ、ねばねばした流れ}\\ \text{大きい}\rightarrow\text{速い流れ、さらさらした流れ}\end{cases}$$

Navier-Stokes方程式の特徴

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = f_i \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

1）Re数の大きさにより方程式の性質が変化する
2）Re数の大きさにより境界層厚さが変化する
3）Re数の大きさにより渦の大きさが変化する
4）Re数が大きくなると3次元性が容易に現れる

非圧縮粘性流れの支配方程式

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{慣性力項（双曲型）}} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{圧力項}} - \underbrace{\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{\text{粘性項（放物型）}} = f_i \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

1）Re数の大きさにより方程式の性質が変化する

Reynolds数が小さい→放物型方程式の特徴を呈する
Reynolds数が大きい→双曲型方程式の特徴を呈する

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

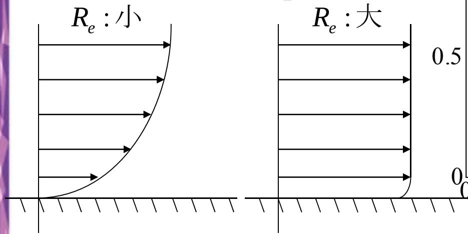
Navier-Stokes方程式の特徴

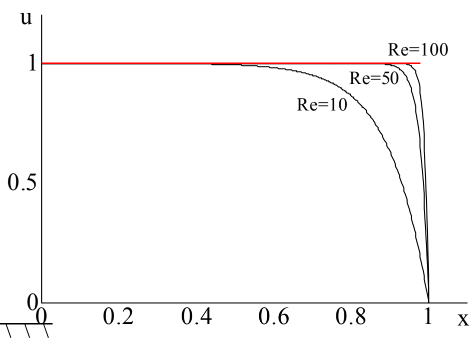
2）Re数の大きさにより境界層厚さが変化する

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{Re}\frac{d^2u}{dx^2}$$ 境界条件 $u(0)=1, \quad u(1)=0$

厳密解

$$u(x) = \frac{1-\exp^{-R_e(1-x)}}{1-\exp^{-R_e}}$$





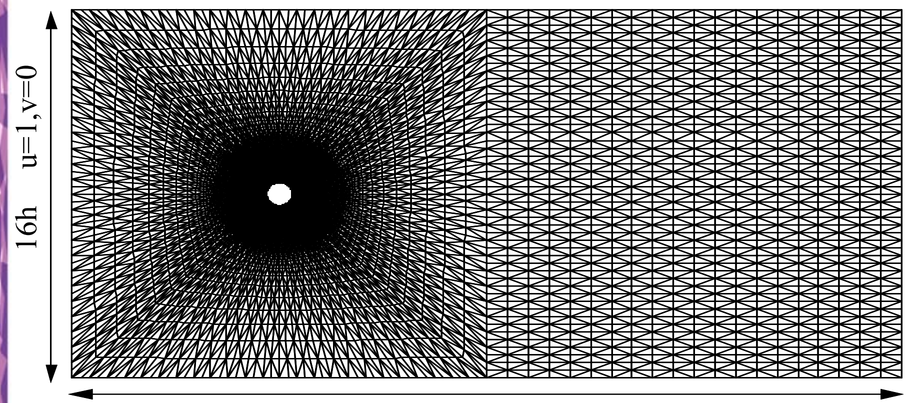
粘性流れの場合:境界層厚さが薄くなる

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

Navier-Stokes方程式の特徴

円 柱 周 り ；　　**有限要素分割図**

u=v=0
u=free,v=0



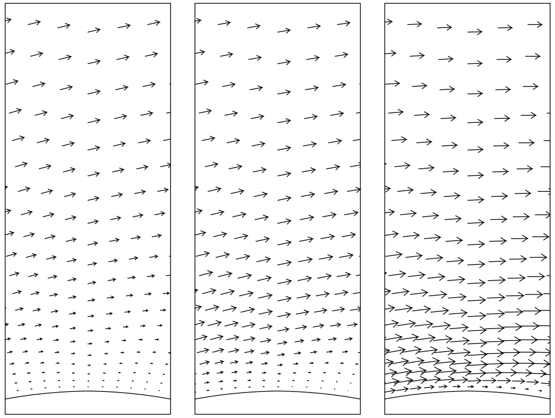
u=free,v=0　32h

計算条件
Re=50,500,5000
Δt=0.005

総節点数；11924
総要素数；23424
最小メッシュ幅；0.00548h

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

Navier-Stokes方程式の特徴



Re=50　　Re=500　　Re=5000　　$\delta \approx 1/\sqrt{\mathrm{Re}}$

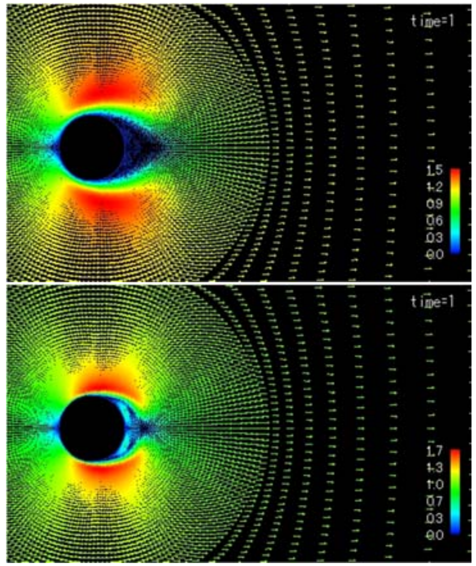
Reが大きくなると境界層厚さが薄くなる

→壁付近で細かい要素分割が必要になる

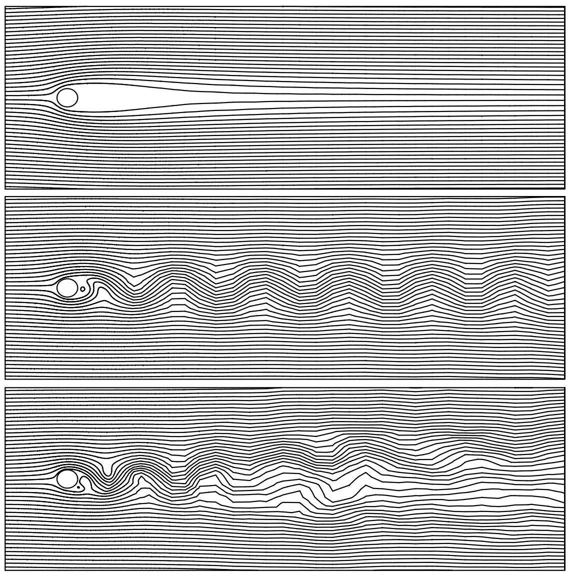
Navier-Stokes方程式の特徴

Re=50

Re=500



Navier-Stokes方程式の特徴



Re=50
Time=100

Re=500

Re=5000

Navier-Stokes方程式の特徴

3）Re数の大きさにより渦の大きさが変化する

１次元を仮定：$u\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$u = \bar{u}(t)\sin kx$

速度の一つのフーリエ成分
または外部的に与えられた撹乱

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{u}^2(t)k\cos kx \sin kx = \frac{1}{2}\bar{u}^2(t)k\sin 2kx$$

非線形項の働きにより，振幅 $\bar{u}$ は $\frac{1}{2}\bar{u}^2$

波数 k は $2k$

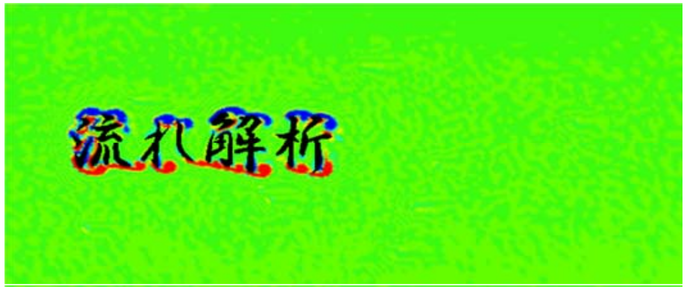
高周波成分を作り出す

↓

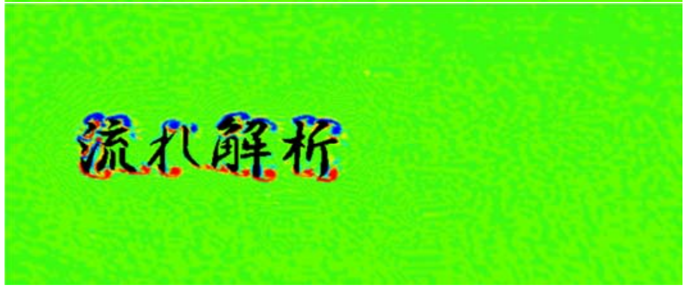
$\boxed{\text{小さな渦の発生}}$

Navier-Stokes方程式の特徴

Re=1,000



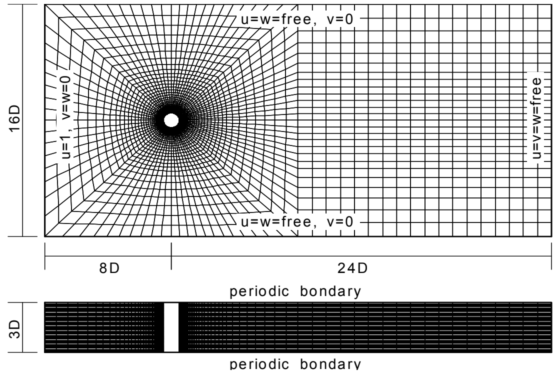
Re=10,000



Navier-Stokes方程式の特徴

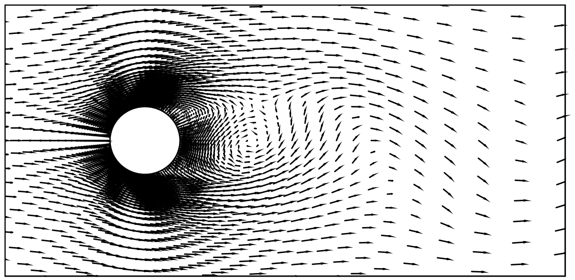
4）Re数が大きくなると3次元性が容易に現れる

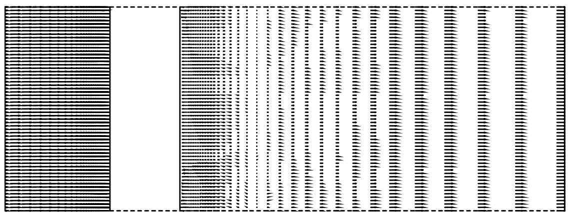
流体は固体に比べて分子間の結合力が弱いため、他の分子に対する位置が容易に変わる。特に、気体は分子間の距離も大きく、ほかの分子の影響をほとんど受けずに自由に動ける状態にある。



Navier-Stokes方程式の特徴

Re=100

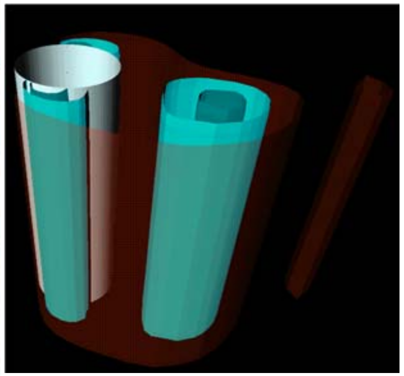


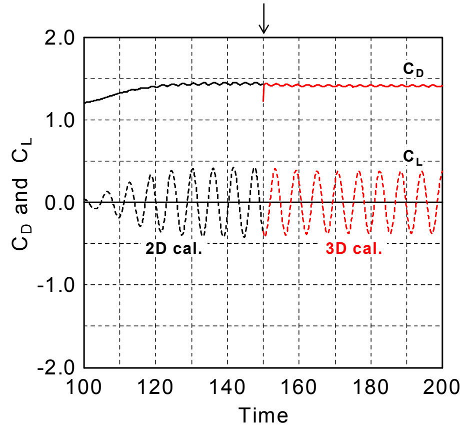


Navier-Stokes方程式の特徴

Re=100

2次元計算の結果を鉛直方向に積み重ねて3次元計算を行った

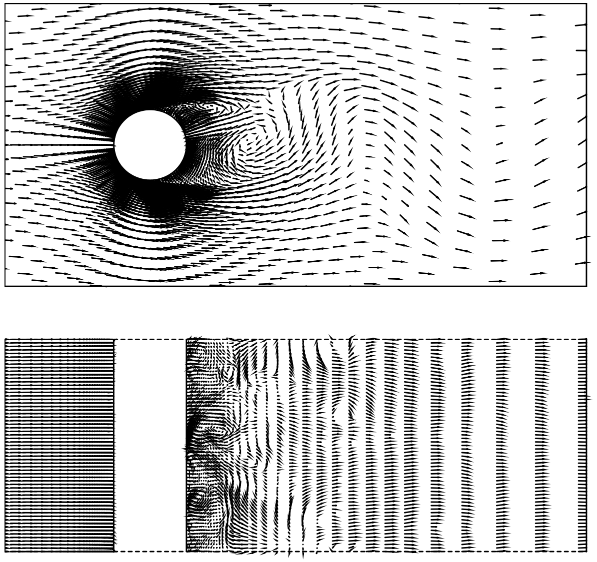




流れの3次元性が生じないために、2次元解析と3次元解析の結果に差異はない

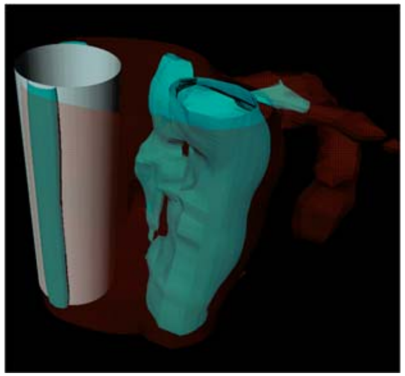
Navier-Stokes方程式の特徴

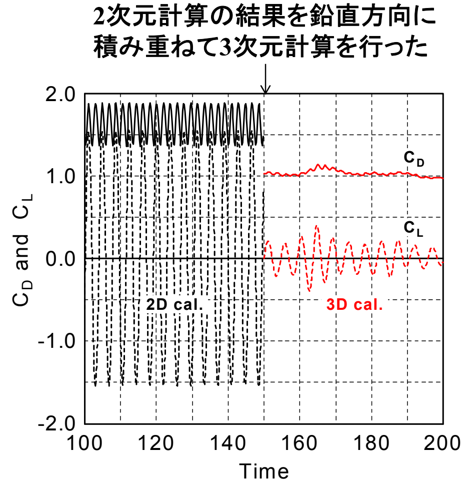
Re=1,000



Navier-Stokes方程式の特徴

Re=1,000

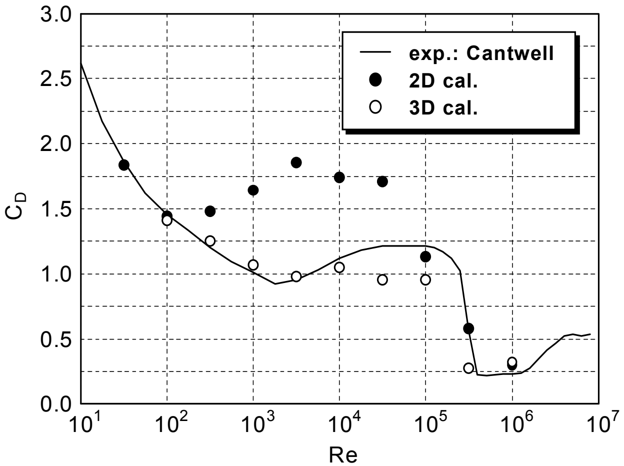




流れの3次元性が生じ、2次元解析と3次元解析では結果に大きな差異が生じる
→3次元解析の必要性

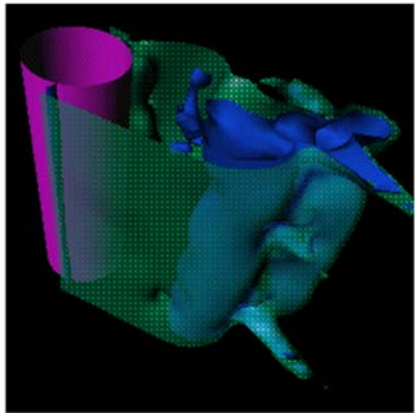
Navier-Stokes方程式の特徴

抗力係数

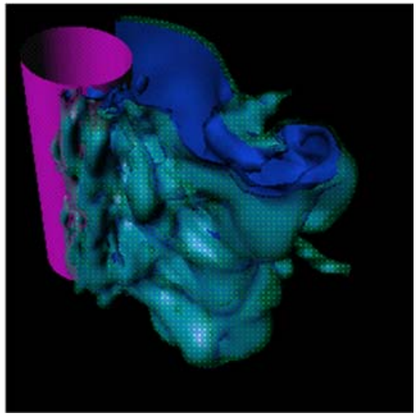


Williamsonの実験では、Re=200において3次元性が現れることを示している（Annual Rev. Fluid Mech., Vol.28, pp.477-539, 1996）

Navier-Stokes方程式の特徴



$R_e = 10^3$



$R_e = 10^5$

Re数が高くなることにより，細かい渦が発生すると共に3次元性が顕著に現れる

Navier-Stokes方程式の特徴（まとめ）

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = f_i \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

1）Re数の大きさにより方程式の性質が変化する
（Re大：双曲型→安定化手法の導入，Re小：放物型）
2）Re数の大きさにより境界層厚さが変化する
（Re大：境界層厚さが薄くなる）
3）Re数の大きさにより渦の大きさが変化する
（移流項は小さい渦を発生させる働きがある）
4）3次元性が容易に現れる（Re>200）

この特徴の理解は，離散化とメッシュ生成を行う上で重要

1．流れ問題の特徴

1.1 流れと物質の移流拡散問題（13話、14話）
流れの記述法
未知変数と支配方程式ー保存則（質量、運動量、エネルギー）
流れ・物質の移流拡散問題の物理現象の特徴

1.2 支配方程式の型と特徴（13話）
偏微分方程式の型と特徴
物理法則に従った離散化の必要性

偏微分方程式の型と特徴

$$A\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + D\frac{\partial \phi}{\partial x} + E\frac{\partial \phi}{\partial t} + F\phi + G = 0$$

判別式
- $B^2 - 4AC < 0$ ：楕円型
- $B^2 - 4AC = 0$ ：放物型
- $B^2 - 4AC > 0$ ：双曲型

平衡問題のように閉じた境界条件が関係する問題（定常問題）
・・・・楕円型
伝播問題のように開いた境界条件が関係する問題（非定常問題）
・・・・放物型or双曲型

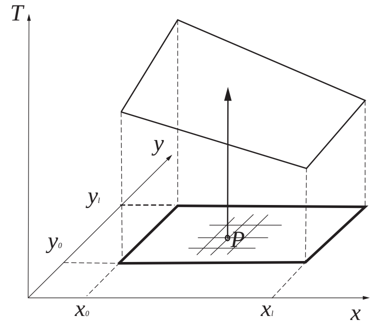
Q: なぜ型を意識するのか？
A: 型により解の特徴が異なる→ふさわしい数値解法が異なる

楕円型方程式

定常熱伝導問題（拡散問題）

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

境界条件：境界で温度が
単調（直線的に）増加



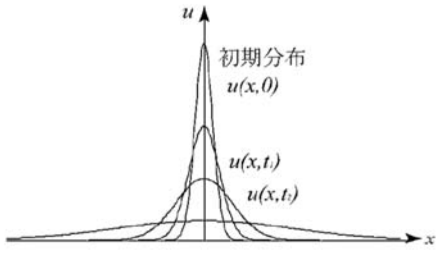
特徴：
1）任意の点における楕円型方程式の解は，その周辺の点の値の平均値になる→Galerkin法に基づく有限要素法（差分法では中心差分近似）がふさわしい
2）多くの定常の場の問題の基礎方程式

典型例：
Laplace方程式：非圧縮性非粘性流体の渦なし流れ（ポテンシャル流れ）

放物型方程式

拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$



(a) 拡散現象

特徴：1）解の空間的広がりに方向性がない→Galerkin法に基づく有限要素法（差分法では中心差分近似）がふさわしい
2）解の時間的変化は大域的である →陰的方法が望ましい

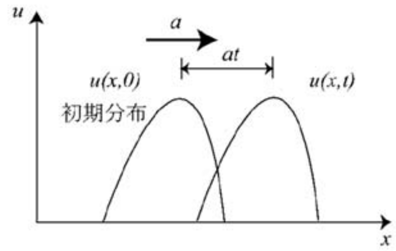
典型例：拡散方程式、Stokes方程式

双曲型方程式

移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

厳密解： $u = u(x,t) = \varphi(x - at)$



(b) 移流現象

特徴：
1）解の空間的広がりに方向性がある（与えられた速度の方向に伝播する）
→空間の離散化には風上化を施した有限要素法（差分法では風上差分）を用いる
2）解の時間的変化は，局所的である（初期の分布形を保ちながら伝播する）
→陽的方法を有効に用いることが可能となる

典型例：波動方程式、移流方程式、Euler方程式

混合型方程式

移流拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\text{移流項}} - \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}_{\text{拡散項}} = r$$

移流項が卓越：双曲型
拡散項が卓越：放物型

$$P_e = \frac{|a|\,L}{\mu}$$ Peclet数（ペクレ数）

類似性が強い

Navier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{移流項}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{\text{粘性項}} = b_i$$

移流項が卓越：双曲型
粘性項が卓越：放物型

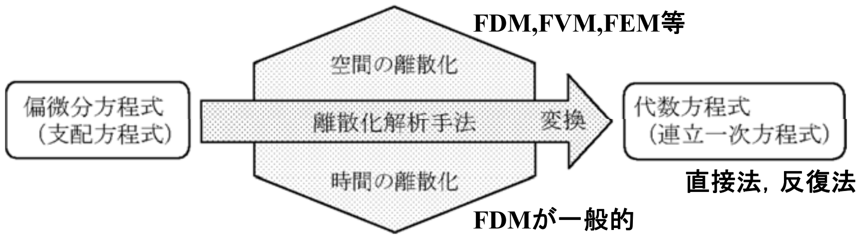
$$R_e = \frac{U\,L}{\nu}$$ Reynolds数（レイノルズ数）

まとめ

	解の空間的、時間的特徴	ふさわしい離散化
楕円型	周辺の値の平均値になる	中心差分近似，Galerkin 有限要素法
放物型	・方向性がない ・大域的な時間的変化	中心差分近似，Galerkin 有限要素法 陰解法
双曲型	・方向性がある ・局所的な時間的変化	風上差分近似，安定化有限要素法 陰解法、陽解法

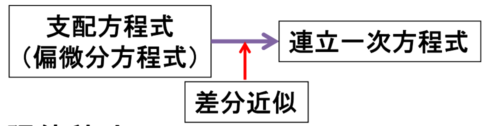
各種離散化解析手法

1) 有限差分法（Finite Difference Method; FDM）
2) 有限体積法（Finite Volume Method; FVM）
3) 有限要素法（Finite Element Method; FEM）
4) その他の手法
　　境界要素法，粒子法，格子ボルツマン法等

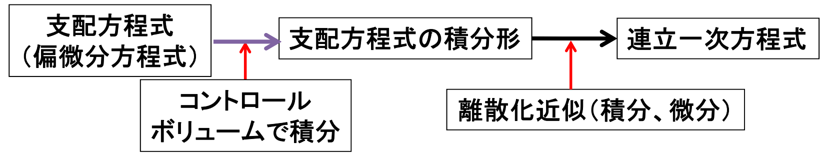


離散化解析手法の比較

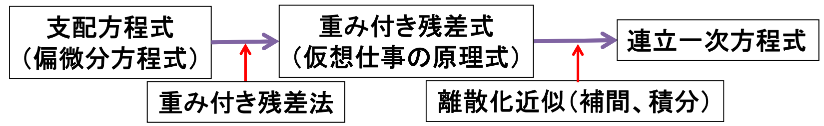
有限差分法



有限体積法



有限要素法



差分法の基礎

Taylor展開

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j + \frac{1}{6}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_j + O((\Delta x)^4) \quad (1)$$

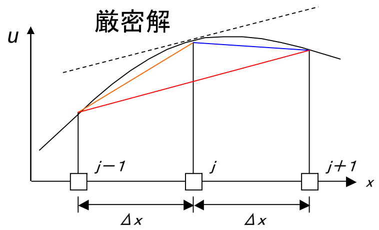
$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j - \frac{1}{6}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_j + O((\Delta x)^4) \quad (2)$$

１階微分の公式

（1）より
$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + O(\Delta x)$$
前進差分　　１次精度

（2）より
$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$
後退差分　　１次精度

（1）－（2）より
$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$
中心差分　　２次精度



差分法の基礎

２階微分の公式

（1）＋（2）より
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$
２次精度

時間の離散化に差分法を適用する

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_j^n + O((\Delta t)^4) \quad (3)$$

$$u_j^{n-1} = u_j^n - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n - \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_j^n + O((\Delta t)^4) \quad (4)$$

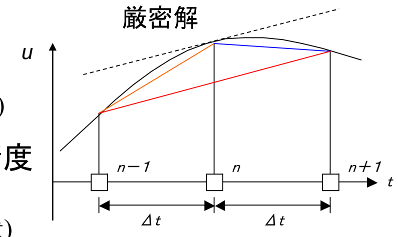
差分法の基礎

1階微分の公式

(3)より
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$
前進差分　1次精度

(4)より
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n = \frac{u_j^{n} - u_{j-1}^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$
後退差分　1次精度

(3)－(4)より
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + O((\Delta t)^2)$$
中心差分　2次精度



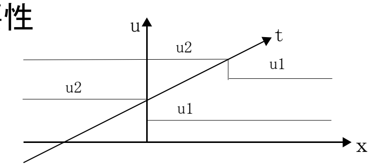
2階微分の公式

(3)＋(4)より
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n} + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2)$$

物理法則に従った離散化(差分法を例に)

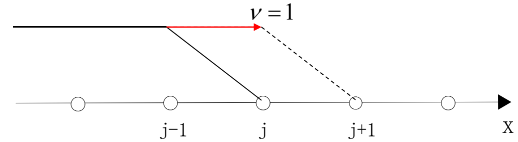
1)双曲型問題に対する風上化の必要性

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad t > 0, -\infty < x < \infty$$



初期条件　$u = u_1 (x \geq 0)$　$u = u_2(x)$

$$u(x,t) = u(x - ct)$$



差分法

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n + c\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$ 時間:前進

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n \approx \frac{u_j^{n} - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$ 空間:後退

$$\therefore \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^{n} - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \underline{c\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$
Courant(クーラン)数

$$\therefore u_j^{n+1} = u_j^n - \nu(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$\nu = 1 \Rightarrow c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$$
厳密解と一致

物理法則に従った離散化(差分法を例に)

誤った離散化
(例えば;時間に対して前進差分，空間に対して前進差分)

$$\therefore u_j^{n+1} = u_j^n - \nu(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

$$\nu = 1 \Rightarrow c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_{j-1}^n$$

厳密解と全く異なる

空間の1階微分:情報を時間と共にある方向に伝播する
対流(移流)を表す.

> 1階微分の係数が伝播する方向を表す.
> ＋:左から右へ伝播　後退差分が適当
> －:右から左へ伝播　前進差分が適当
> ⇒風上差分法，風上(安定化)有限要素法

物理法則に従った離散化(差分法を例に)

2)放物型問題に対する中心差分，Galerkin法の有効性

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n - \alpha\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n = 0$$

正しい離散化(時間に対して前進差分，空間に対して中心差分)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

$$\therefore \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \alpha\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$k = \alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$$

拡散現象⇒中心差分が適当

空間の2階微分:時間の経過と共に空間での値を緩やかにする拡散に対応する.

> **拡散現象:中心差分法，Galerkin有限要素法が適当**

2. 流れ問題の離散化の要点

2.1 移流・拡散方程式の離散化の要点（13話）
移流の卓越による数値不安定性とその回避

2.2 Navier - Stokes方程式の離散化の要点（14話）

2.3 メッシュ分割や要素選択の要点（15話）

2.4 固体・構造解析との類似点・相違点

第13話 FEM流体解析の登竜門

話のポイント：
・流れ・物質の移流拡散問題の支配方程式と解の特徴を理解する
・安定化手法（安定化有限要素法）とは何かを理解する

1. 偏微分方程式の型とその特徴を知る
2. 移流計算の難しさ
3. 定常問題における安定化手法
4. 非定常問題における安定化手法

執筆担当：奥村弘（富山大学）、樫山和男（中央大学）

移流拡散方程式とNavier-Stokes方程式
ー混合型方程式ー

移流拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f$$

$$P_e = \frac{a\,L}{\mu}$$

移流項が卓越（Pe大）：双曲型
拡散項が卓越（Pe小）：放物型

Navier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = f_i$$

$$R_e = \frac{U\,L}{\nu}$$

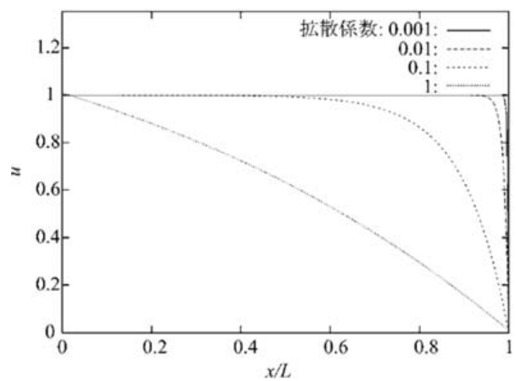
移流項が卓越（Re大）：双曲型
粘性項が卓越（Re小）：放物型

移流計算の難しさ

$$a\frac{du}{dx} - \mu\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \text{in} \quad 0 < x < L$$

境界条件 $u(0) = 1, \quad u(L) = 0$

厳密解 $$u(x) = 1 - \frac{\exp(a\,x/\mu) - 1}{\exp(a\,L/\mu) - 1}$$



重み付き残差法

$$L(u)=0 \qquad \begin{cases} L: \text{微分演算子} \\ u: \text{厳密解} \end{cases}$$

$\bar{u}$: 近似解(多項式近似)

$$L(\bar{u}) = \underbrace{R}_{\text{残差}} \neq 0$$

$$\int_{\Omega} \underbrace{w}_{\text{重み関数}} L(\bar{u})\,d\Omega = \int_{\Omega} wR\,d\Omega = 0$$

$$R \Rightarrow 0 \qquad \therefore \bar{u} \Rightarrow u(\text{厳密解})$$

有限要素法(Galerkin法)

$$a\frac{du}{dx} - \mu\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \text{in} \quad 0 < x < L \qquad u(0)=1, \quad u(L)=0$$

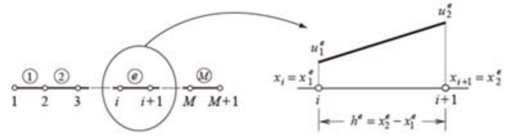
ディリクレ境界条件

$$\int_0^L v\,a\frac{du}{dx}\,dx + \underline{\int_0^L v\mu\frac{d^2u}{dx^2}\,dx} = 0 \qquad v(0)=0, \quad v(L)=0$$

部分積分

$$\int_0^L v\,a\frac{du}{dx}\,dx + \int_0^L \mu\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}\,dx = \left[v\,\mu\frac{du}{dx}\right]_0^L$$

$$\int_0^L v\,a\frac{du}{dx}\,dx + \mu\int_0^L \frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}\,dx = 0$$



(a) 要素分割　(b) 2節点1次要素と関数近似

Galerkin有限要素法による解

$$\sum_{e=1}^{M}\int_0^h v_h\,a\frac{du_h}{dx}\,dx + \sum_{e=1}^{M}\int_0^h \mu\frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}\,dx = 0$$

2節点1次要素

$$u_h = (1-\frac{\bar{x}}{h})u_1^e + \frac{\bar{x}}{h}u_2^e$$

$$= N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e$$

$$v_h = N_1^e v_1^e + N_2^e v_2^e = N_\alpha^e v_\alpha^e \qquad \text{Galerkin法}$$

(1871-1945)

$$a\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2} - \mu\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h} = 0$$

式変形(両辺をhで割る)

$$\begin{cases} a\dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} - \mu\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = 0, \quad i=1,2,\cdots,N-1 \\ u_0 = 1, \; u_N = 0 \end{cases}$$

差分法(中心差分)、有限体積法(中点公式)の結果と同一

空間方向の離散化

重み関数

$$u^{*e} \approx N_1^e u_1^{*e} + N_2^e u_2^{*e} = N_\alpha^e u_\alpha^{*e} \quad \text{:Galerkin法}$$

$$u_\alpha^{*e} a\int_0^h N_\alpha^e \frac{\partial N_\beta^e}{\partial x}dx u_\beta^e + u_\alpha^{*e}\mu\int_0^h \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x}\frac{\partial N_\beta^e}{\partial x}dx u_\beta^e = 0$$

重み関数の任意性より

$$a\int_0^h N_\alpha^e \frac{\partial N_\beta^e}{\partial x}dx u_\beta^e + \mu\int_0^h \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x}\frac{\partial N_\beta^e}{\partial x}dx u_\beta^e = 0$$

$$\downarrow$$

$$S_e u_e + K_e u_e = 0$$

空間方向の離散化（係数マトリックス）

移流行列

$$S_e = a\int_0^h N_\alpha^e \frac{\partial N_\beta^e}{\partial x} dx = a\int_0^h \begin{bmatrix} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1\frac{\partial N_2}{\partial x} \\ N_2 \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_2 \frac{\partial N_2}{\partial x}\end{bmatrix} dx = a\int_0^h \begin{bmatrix} (1-\frac{x}{h})(-\frac{1}{h}) & (1-\frac{x}{h})(\frac{1}{h}) \\ (\frac{x}{h})(-\frac{1}{h}) & (\frac{x}{h})(\frac{1}{h})\end{bmatrix}dx$$

$$= a\int_0^h \begin{bmatrix} -\frac{1}{h}+\frac{x}{h^2} & \frac{1}{h}-\frac{x}{h^2} \\ -\frac{x}{h^2} & \frac{x}{h^2}\end{bmatrix}dx = a\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

拡散行列

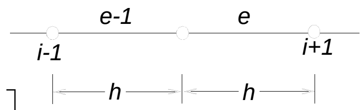
$$K_e = \mu\int_0^h \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x}\frac{\partial N_\beta^e}{\partial x}dx = \mu\int_0^h \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x}\frac{\partial N_2}{\partial x}\end{bmatrix}dx = \mu\int_0^h \begin{bmatrix} (-\frac{1}{h})(-\frac{1}{h}) & (-\frac{1}{h})(\frac{1}{h}) \\ (\frac{1}{h})(-\frac{1}{h}) & (\frac{1}{h})(\frac{1}{h})\end{bmatrix}dx$$

$$= \mu\int_0^h \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2}\end{bmatrix}dx = \mu\begin{bmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h}\end{bmatrix}$$

$$S_e u_e + K_e u_e = 0$$

空間方向の離散化

$$S_e u_e + K_e u_e = 0$$



e-1要素
$$a\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{i-1}\\u_i\end{Bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}\frac{1}{h}&-\frac{1}{h}\\-\frac{1}{h}&\frac{1}{h}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{i-1}\\u_i\end{Bmatrix}=0$$

e要素
$$a\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{i}\\u_{i+1}\end{Bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}\frac{1}{h}&-\frac{1}{h}\\-\frac{1}{h}&\frac{1}{h}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{i}\\u_{i+1}\end{Bmatrix}=0$$

重ね合わせ
$$a\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{i-1}\\u_i\\u_{i+1}\end{Bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}\frac{1}{h}&-\frac{1}{h}&0\\-\frac{1}{h}&\frac{2}{h}&-\frac{1}{h}\\0&-\frac{1}{h}&\frac{1}{h}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{i-1}\\u_i\\u_{i+1}\end{Bmatrix}=0$$

空間方向の離散化

節点iに関する式

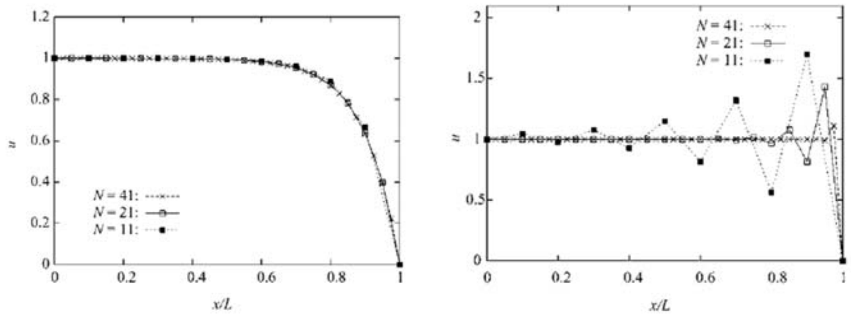
$$a\frac{u_{i-1}-u_{i+1}}{2} - \mu\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h} = 0$$

式変形（両辺をhで割る）

$$a\frac{u_{i-1}-u_{i+1}}{2h} - \mu\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} = 0$$

中心差分近似による結果と一致する
（Galerkin有限要素法と中心差分は等価）

Galerkin有限要素法による解



(a) 拡散係数が大きい場合: $\mu = 0.1$ (b) 拡散係数が小さい場合: $\mu = 0.01$

図 1.4 Galerkin 法 (中心差分) による近似解

拡散係数が小さい場合に数値振動が発生する

安定化手法（風上差分法、Upwind Galerkin法）

差分法では移流項に風上（後退）差分を用いる

$$\begin{cases} a\,\underline{\dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}} - \mu\,\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1 \\ u_0 = 1,\ u_N = 0 \end{cases}$$

予め人工粘性を加えた式を中心差分近似したことと等価

$$a\,\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\,h} - (\mu + \mu_{\mathrm{art}})\,\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$\mu_{\mathrm{art}} = \frac{|a|\,h}{2}$$

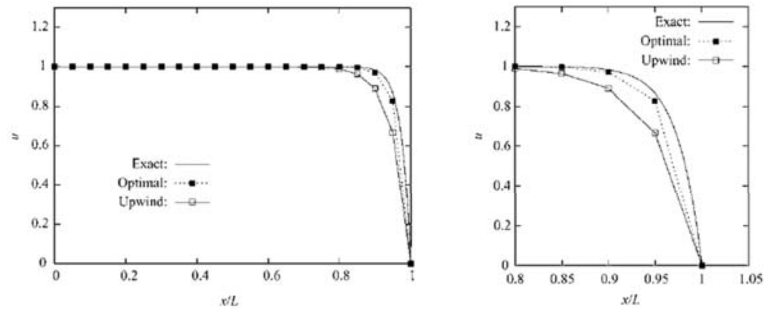
Upwind Galerkin法

$$\int_0^L v_h\,a\,\frac{du_h}{dx}\,dx + (\mu + \mu_{\mathrm{art}})\int_0^L \frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}\,dx = 0$$

人工拡散係数を加える方法は合理性に欠ける

Upwind Galerkin法

$$\mu_{\mathrm{art}} = \frac{|a|\,h}{2} \qquad \mu^* = \frac{|a|\,h}{2}\xi(\alpha) = \frac{|a|\,h}{2}\left(\coth\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$$



(a) 近似解 u_h のプロファイル　(b) 境界層近傍のプロファイル

図 1.5　人工拡散の効果

人工拡散係数を加える方法は合理性に欠ける

安定化有限要素法

Upwind Petrov-Galerkin法

$$\int_0^L v_h\,a\,\frac{du_h}{dx}\,dx + (\mu + \mu^*)\int_0^L \frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}\,dx = 0$$

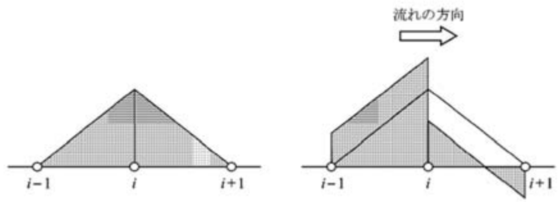
$$\int_0^L \left(v_h + \frac{\mu^*}{a}\frac{dv_h}{dx}\right) a\,\frac{du_h}{dx}\,dx + \mu\int_0^L \frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}\,dx = 0$$

$$\int_0^L \underbrace{\left(v_h + \frac{\mu^*}{a}\frac{dv_h}{dx}\right)}_{\text{重み関数}} a\,\frac{du_h}{dx}\,dx + \mu\int_0^L \frac{d}{dx}\underbrace{\left(v_h + \frac{\mu^*}{a}\frac{dv_h}{dx}\right)}_{\text{重み関数}}\frac{du_h}{dx}\,dx = 0$$

$$\tilde{v}_h = v_h + \frac{\mu^*}{a}\frac{dv_h}{dx} = v_h + \tau\,a\,\frac{dv_h}{dx}$$

$$\tau = \frac{h}{2\,|a|}\,\xi(\alpha)$$

安定化有限要素法



(a) Galerkin法の重み関数　(b) SUPG法の重み関数

図 1.6　重み関数

T.J.R. Hughes

$$\int_0^L \tilde{v}_h\,a\,\frac{du_h}{dx}\,dx + \mu\int_0^L \frac{d\tilde{v}_h}{dx}\frac{du_h}{dx}\,dx = 0$$

$$\tilde{v}_h = v_h + \frac{\mu^*}{a}\frac{dv_h}{dx} = v_h + \tau\,a\,\frac{dv_h}{dx}$$

$$\tau = \frac{h}{2\,|a|}\,\xi(\alpha)$$

安定化有限要素法(まとめ)

Galerkin法

$$\int_0^L v\, a \frac{du}{dx}\, dx + \mu \int_0^L \frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}\, dx = 0$$

Upwind Galerkin法

$$\int_0^L v_h\, a \frac{du_h}{dx}\, dx + (\mu+\mu_{\mathrm{art}})\int_0^L \frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}\, dx=0$$

Upwind Petrov-Galerkin法

$$\int_0^L \tilde v_h\, a \frac{du_h}{dx}\, dx + \mu\int_0^L \frac{d\tilde v_h}{dx}\frac{du_h}{dx}\, dx=0$$

$$\tilde v_h = v_h + \frac{\mu^*}{a}\frac{dv_h}{dx} = v_h + \tau a \frac{dv_h}{dx}$$

要素境界で不連続

↓

部分積分を行えない

$$\int_0^L v_h\left(a\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)d\Omega + \mu\int_0^L \frac{\partial v_h}{\partial x}\frac{\partial u_h}{\partial x}\,d\Omega$$

Galerkin項

$$+\sum_{e=1}^M \tau\int_{x_e^a}^{x_e^b}\left(a\frac{\partial v_h}{\partial x}\right)\left(a\frac{\partial u_h}{\partial x}-\mu\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}\right)d\Omega=0$$

安定化項(SUPG項)

支配方程式を満足する形で安定化が行える(人工粘性ではない)

多次元問題への応用

$$a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f$$

$$\tilde v_h = v_h + \tau a_k \frac{\partial v_h}{\partial x_k}$$

$$\int_\Omega v_h\left(a_i \frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right)d\Omega + \mu\int_\Omega \frac{\partial v_h}{\partial x_i}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\,d\Omega +$$

Galerkin項

$$\sum_{e=1}^M \tau\int_{\Omega_e}\left(a_k\frac{\partial v_h}{\partial x_k}\right)\left(a_j\frac{\partial u_h}{\partial x_j}-\mu\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j\partial x_j}-f\right)d\Omega = \int_\Omega v_h f\, d\Omega$$

安定化項(SUPG項)

テンソル異方性をもつ

$$\tau\int_{\Omega_e}\left(a_k\frac{\partial v_h}{\partial x_k}\right)\left(a_j\frac{\partial u_h}{\partial x_j}\right)d\Omega = \tau\int_{\Omega_e}\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k}a_k a_i \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j}\,d\Omega\, u_\beta^e$$

安定化の効果:流線方向にのみ作用する $\begin{bmatrix} a_x a_x & a_x a_y \\ a_y a_x & a_y a_y\end{bmatrix}$

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

数値解析例ー斜め移流問題ー

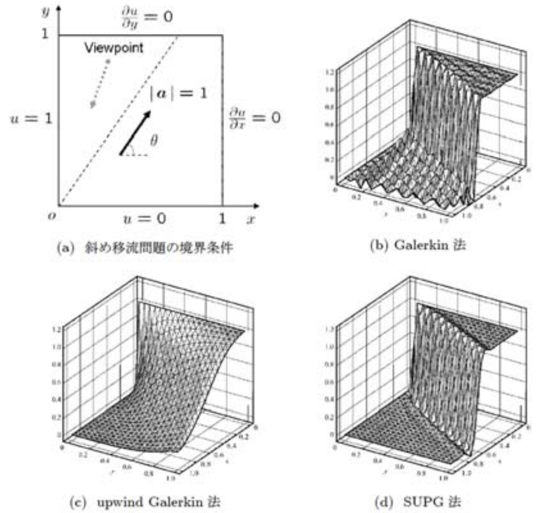


図 1.7 斜め移流問題の境界条件および計算結果

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

非定常問題における安定化有限要素法

BTD法とSUPG法

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3)$$

$$\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-a_i\frac{\partial u^n}{\partial x_i}\right) = -a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u^n}{\partial t}\right) = a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_j\frac{\partial u^n}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial u^n}{\partial t} = -a_i\frac{\partial u^n}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i\partial x_i} + f$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + a_i\frac{\partial u^n}{\partial x_i} - \mu\frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\Delta t}{2}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_j\frac{\partial u^n}{\partial x_j}\right) = f$$

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

BTD法

$$\int_\Omega v_h \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + a_i \frac{\partial u_h^n}{\partial x_i} \right\} d\Omega + \mu \int_\Omega \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^n}{\partial x_i} d\Omega$$
$$+ \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \left(a_i \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right) \left(a_j \frac{\partial u_h^n}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_\Omega v_h\, f\, d\Omega$$

SUPG法において $\tau = \dfrac{\Delta t}{2}$ とし移流項のみに安定化を施した手法と等価

$$\int_\Omega v_h \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + a_i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right) d\Omega + \mu \int_\Omega \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} d\Omega +$$
$$\sum_{e=1}^{M} \tau \int_{\Omega_e} \left(a_i \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + a_j \frac{\partial u_h}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j \partial x_j} - f \right) d\Omega = \int_\Omega v_h\, f\, d\Omega$$

$$\tau = \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2|\boldsymbol{a}|}{h} \right)^2 + \left(\frac{4\mu}{h^2} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

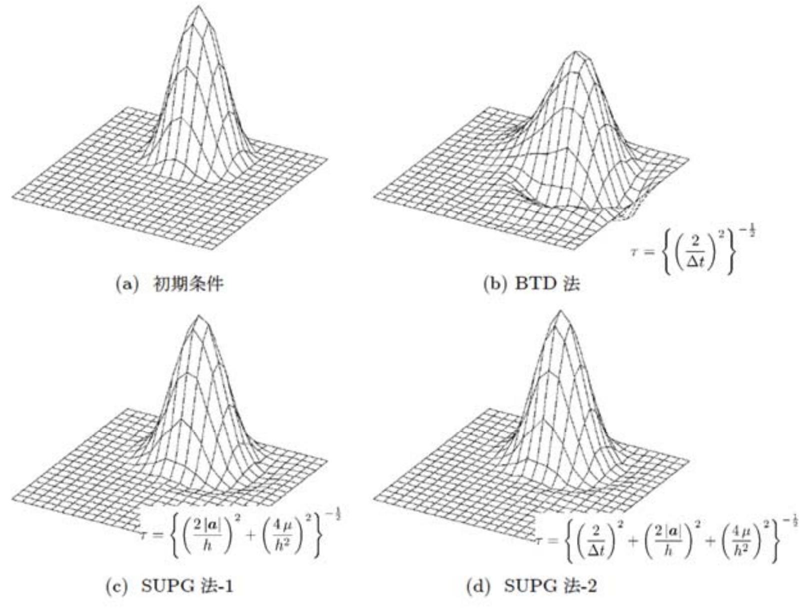


図 1.8 Rotating cone 問題の初期条件および計算結果

$$\int_\Omega v_h \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + a_i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right) d\Omega + \mu \int_\Omega \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} d\Omega +$$
$$\sum_{e=1}^{M} \tau \int_{\Omega_e} \left(a_i \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + a_j \frac{\partial u_h}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j \partial x_j} - f \right) d\Omega = \int_\Omega v_h\, f\, d\Omega$$

SUPG法からGLS（Galerkin Least Squares）法へ

$$\tilde{v}_h = v_h + \tau \left(\frac{\partial v_h}{\partial t} + a_i \frac{\partial v_h}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_i} \right)$$

$$\int_\Omega v_h \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + a_i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right) d\Omega + \mu \int_\Omega \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} d\Omega +$$
$$\sum_{e=1}^{M} \tau \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial v_h}{\partial t} + a_i \frac{\partial v_h}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_i} - f \right) \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + a_j \frac{\partial u_h}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j \partial x_j} - f \right) d\Omega$$
$$= \int_\Omega v_h\, f\, d\Omega$$

残差の最小二乗形式

安定化項が対称になる

2. 流れ問題の離散化の要点

2.1 移流・拡散方程式の離散化の要点（13話）

2.2 Navier－Stokes方程式の離散化の要点（14話）
- 数値不安定性（移流の卓越に起因、非圧縮条件の過拘束に起因）とその回避
- 直接法と分離型解法による離散化

2.3 メッシュ分割や要素選択の要点（15話）

2.4 固体・構造解析との類似点・相違点

第14話　FEMによるナビエ－ストークス流れへのいざない

話のポイント:
・ナビエ－ストークス流れの特徴を理解する
・数値不安定性の要因とその回避法（安定化有限要素法）の要点を理解する

1. ナビエ－ストークス流れの特徴
2. 数値不安定性とその回避
3. 直接法と分離型解法による離散化

執筆担当　樫山和男（中央大学）

非圧縮性粘性流体の解法

☆ 直接法：　運動方程式と連続式に対して直接有限要素法を適用する方法である。

☆ 分離型解法：運動方程式と連続式に対して時間の離散化を行ったうえで式変形を行い、流速場と圧力場を分離した半離散化式を導出し、それらに対して有限要素法を適用する方法である。

直接解法に基づく支配方程式

支配方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = f_i \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

Navier-Stokesの運動方程式と連続式に対して有限要素法を適用する（速度場と圧力場を分離しない）

境界条件

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_g$$

$$\left(-p\,\delta_{ij} + \frac{1}{R_e}\,u_{i,j}\right) n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_h$$

自然境界条件（圧力項と粘性項を部分積分）

分離型解法に基づく支配方程式

MAC法

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|^{n+\theta} + u_j \left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^{n+\theta} + \left.\frac{\partial p}{\partial x_i}\right|^{n+\theta} - \left.\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right|^{n+\theta} = 0$$

Navier-Stokes方程式を陽解法により時間方向に離散化する（θ＝0）

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2} = 0$$

↓

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\left\{ - u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2}\right\} \quad (1)$$

運動方程式の発散をとる

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} + \Delta t\left\{ - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i}\right)\right\}$$

分離型解法に基づく支配方程式

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} + \Delta t\Big\{ - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i}\right)\Big\}$$

$\parallel$ 0　連続式を考慮

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i}\right) \quad (2)$$

分離型解法では半離散化方程式の段階（方程式レベル）
で圧力のPoisson方程式が導出される.
→圧力に関する境界条件が必要

支配方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\Big\{ - u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2}\Big\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i}\right) \quad (2)$$

式(2)から圧力場を求め、その結果を(1)に代入し速度場を求める

分離型解法に基づく支配方程式

支配方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\Big\{ - u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2}\Big\} \quad (1)$$

陽的に解く

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_g$$

$$\left(-p\,\delta_{ij} + \frac{1}{R_e} u_{i,j}\right) n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_h$$

圧力項、粘性項を部分積分した場合

陰的に解く

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i}\right) \quad (2)$$

$$p^{n+1} = \hat{p} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{p}}$$

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n_i} = \hat{q}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{q}}$$

圧力の境界条件を与えることは難しい
（圧力は速度から求まる非決定応力）

分離型解法に基づく支配方程式

Fractional step法

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2} = 0$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0$$

運動方程式の発散をとり，連続式を代入する

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}$$ 陰的に解く

$$\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t\Big\{u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2}\Big\}$$ 陽的に解く

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}$$ 陽的に解く

解析アルゴリズム： $\tilde{u}_i \Rightarrow p^{n+1} \Rightarrow u_i^{n+1}$

分離型解法

分離型解法では半離散化方程式の段階（方程式レベル）
で圧力のPoisson方程式が導出される.

⬇

圧力の境界条件が必要！

ディリクレ条件 $p^{n+1} = \hat{p} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{p}}$

ノイマン条件 $\dfrac{\partial p^{n+1}}{\partial n_i} = \hat{q}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{q}}$

数値振動を引き起こす二つの原因

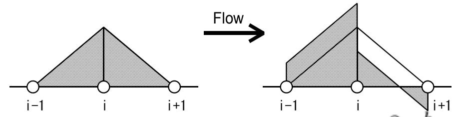
☆ 解析対象が高Reynolds数流れになった場合（移流項が卓越する場合）.
→双曲型の方程式に共通

☆ 直接法の場合で流速・圧力の補間関数の組み合わせ（変数の配置）が下限上限条件
(inf-sup condition)を満たさない場合
→非圧縮条件の過拘束

安定化有限要素法（SUPG/PSPG,GLS）の採用
スタガード格子の採用（差分法，有限体積法）

直接法に基づく有限要素法

SUPG法



$$\tilde{w}_i^h = w_i^h + \delta_i^h, \quad \delta_i^h = \tau_m u_k^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_k}$$

$$\int_\Omega w_i \left(\frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right) d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j}\left(-p^h \delta_{ij} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right) d\Omega + \int_\Omega q^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_i} d\Omega$$

$$+ \sum_{e=1}^{M} \int_{\Omega_e} \tau_m^e u_k^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial p^h}{\partial x_i} - \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial x_j^2}\right) d\Omega$$

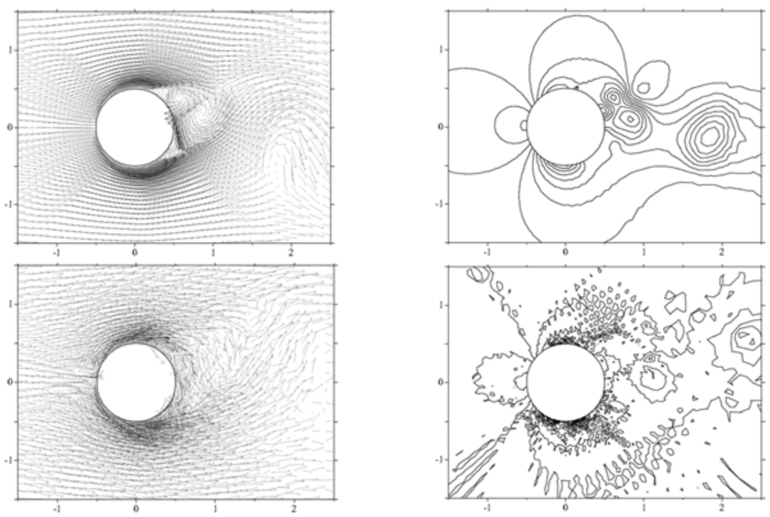
SUPG項

$$= \int_{\Gamma_h} w_i^h \left(-p^h \delta_{ij} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right) n_j \, d\Gamma$$

Galerkin項

$$\tau_m^e = \left\{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e}\right)^2 + \left(\frac{4}{R_e u h_e^2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

移流による数値不安定性の例



上：SUPG項あり、下：SUPG項なし（有限要素法） (Re=10,000)

直接法に基づく離散化

離散化方程式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}^{n+1} \\ \boldsymbol{p}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}^n \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix}$$

逆行列が存在するか否かは補間関数（変数の配置）の組み合わせにより決まる
直感的→対角成分の0の数が少ない方がよい

下限上限条件 (inf-sup condition)

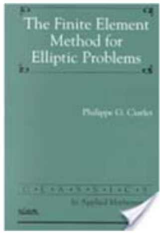
詳しくは，菊地文雄「有限要素法の数理」培風館
文献1）続・有限要素法による流れのシミュレーション（シュプリンガー・ジャパン）

要素の名称について

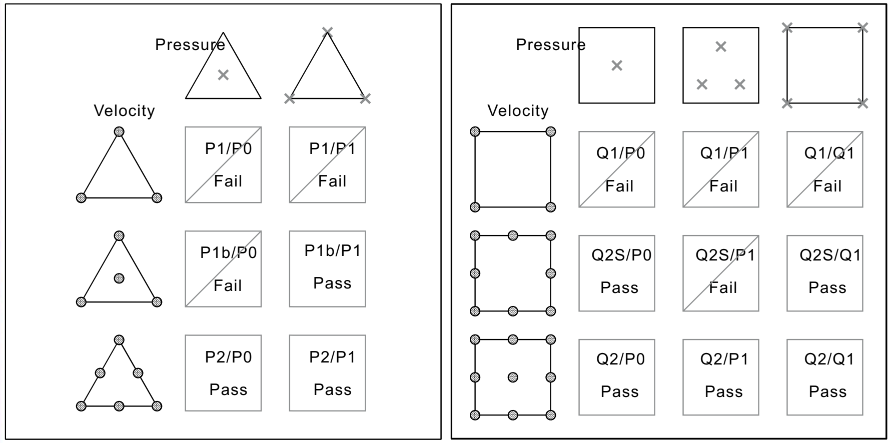
P：polynomialのP
Q: quadrilateralのQ

P_k: polynomial of degree k で2次元三角形、3次元四面体要素
(単体要素)
Q_k: bi-linear, bi-quadratic, bi-cubic (k=1,2,3)で
2次元四角形、3次元六面体要素

この記法の起こりは
P.G. Ciarlet, "The Finite Element Method for Elliptic Problem", SIAM, North-Holland, 1978
の44ページ

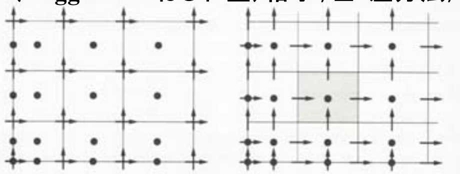


三角形要素と四角形要素



差分法･有限体積法における未知変数の配置

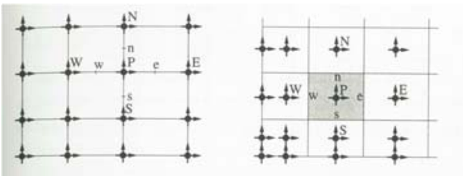
スタッガード(staggered＝ねじれ型)格子；左：差分法，右：有限体積法



● 圧力
→ 速度

利点：速度と圧力のカップリングが良い→数値振動が回避できる
(有限要素法の混合補間の変数配置に似ている)

コロケート(colocated=集中)格子；左：差分法，右：有限体積法



利点：非構造格子に対して有利(汎用CFDコード)
境界条件が考慮しやすい

直接法に基づく安定化有限要素法

GLS(Galerkin/Least-squares)法

時間の離散化：差分法、要素：1次要素

$$\int_\Omega w_i\left(\frac{\partial u_i^h}{\partial t}+u_j^h\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)d\Omega+\int_\Omega\frac{\partial w_i^h}{\partial x_j}\left(-p^h\,\delta_{ij}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)d\Omega+\int_\Omega q^h\,\frac{\partial u_i^h}{\partial x_i}\,d\Omega$$

$$+\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\tau_m^e\left(\cancel{\frac{\partial w_i^h}{\partial t}}+u_j^h\frac{\partial w_i^h}{\partial x_j}+\frac{\partial q^h}{\partial x_i}-\cancel{\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 w_i^h}{\partial x_k^2}}\right)\left(\frac{\partial u_i^h}{\partial t}+u_j^h\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}+\frac{\partial p^h}{\partial x_i}-\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial x_j^2}\right)d\Omega$$

時間の離散化に差分法　　要素に1次要素

$$+\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\tau_c^e\left(\frac{\partial w_i^h}{\partial x_i}\frac{\partial u_j^h}{\partial x_j}\right)d\Omega=\int_{\Gamma_h}w_i^h\left(-p^h\,\delta_{ij}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)n_j\,d\Gamma$$

↓

SUPG/PSPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin
/Pressure Stabilizing Petrov Galerkin)法

離散化とプログラミングの詳細：
続・有限要素法による流れのシミュレーション，丸善，2012

直接法に基づく安定化有限要素法

$$\int_\Omega w_i\left(\frac{\partial u_i^h}{\partial t}+u_j^h\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)d\Omega+\int_\Omega\frac{\partial w_i^h}{\partial x_j}\left(-p^h\,\delta_{ij}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)d\Omega+\int_\Omega q^h\frac{\partial u_i^h}{\partial x_i}d\Omega$$

$$+\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\tau_m^e\left(\underbrace{u_j^h\frac{\partial w_i^h}{\partial x_j}}_{\text{SUPG項}}+\underbrace{\frac{\partial q^h}{\partial x_i}}_{\text{PSPG項}}\right)\left(\underline{\frac{\partial u_i^h}{\partial t}}+\underline{u_j^h\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}}+\underline{\frac{\partial p^h}{\partial x_i}}-\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial x_j^2}\right)d\Omega$$

$$+\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\tau_c^e\left(\frac{\partial w_i^h}{\partial x_i}\frac{\partial u_j^h}{\partial x_j}\right)d\Omega=\int_{\Gamma_h}w_i^h\left(-p^h\,\delta_{ij}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)n_j\,d\Gamma$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}^{n+1}\\ \boldsymbol{p}^{n+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}^n\\ \boldsymbol{0}\end{Bmatrix}\qquad \underbrace{\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\tau_m^e\frac{\partial q^h}{\partial x_i}\frac{\partial p^h}{\partial x_i}d\Omega}_{\text{PSPG項}}$$

Q:SUPG/PSPG法:なぜ同次補間で解が求まるか？
A:対角成分に非ゼロ行列が入り下限上限条件条件を満足する

直接法に基づく安定化有限要素法

$$\int_\Omega w_i\left(\frac{\partial u_i^h}{\partial t}+u_j^h\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)d\Omega+\int_\Omega\frac{\partial w_i^h}{\partial x_j}\left(-p^h\,\delta_{ij}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)d\Omega+\int_\Omega q^h\frac{\partial u_i^h}{\partial x_i}d\Omega$$

$$+\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\tau_m^e\left(u_j^h\frac{\partial w_i^h}{\partial x_j}+\frac{\partial q^h}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i^h}{\partial t}+u_j^h\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}+\frac{\partial p^h}{\partial x_i}-\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial x_j^2}\right)d\Omega$$

$$+\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\tau_c^e\left(\frac{\partial w_i^h}{\partial x_i}\frac{\partial u_j^h}{\partial x_j}\right)d\Omega=\int_{\Gamma_h}w_i^h\left(-p^h\,\delta_{ij}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\right)n_j\,d\Gamma$$

↓ 同次補間要素による離散化

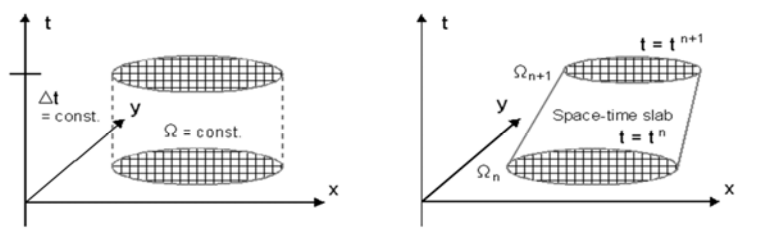
$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_\delta)\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{K}_\delta(\boldsymbol{u}))\,\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_\delta)\,\boldsymbol{p}+\frac{1}{R_e}\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{M}_\epsilon\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\boldsymbol{K}_\epsilon(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{C}_\epsilon\,\boldsymbol{p}=\boldsymbol{F}_\epsilon$$

時間方向の離散化

☆空間離散化に有限要素法、時間離散化に差分法を適用する方法:一般的な方法

☆空間離散化、時間離散化ともに有限要素法を適用する方法 (Space-time有限要素法)



(a)差分法

(b)有限要素法
精度が高い

直接法に基づく安定化有限要素法

時間の離散化（ $n+\theta$ で方程式を満足させる）

$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_\delta)\left.\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right|^{n+\theta}+(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}^{n+\theta})+\boldsymbol{K}_\delta(\boldsymbol{u}^{n+\theta}))\,\boldsymbol{u}^{n+\theta}-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_\delta)\,\boldsymbol{p}^{n+\theta}+\frac{1}{R_e}\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{u}^{n+\theta}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_\delta$$

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}^{n+\theta}+\boldsymbol{M}_\epsilon\left.\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right|^{n+\theta}+\boldsymbol{K}_\epsilon(\boldsymbol{u}^{n+\theta})\,\boldsymbol{u}^{n+\theta}-\boldsymbol{C}_\epsilon\,\boldsymbol{p}^{n+\theta}=\boldsymbol{F}_\epsilon$$

差分法の適用（$\theta=1/2$）

$$\left.\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right|^{n+\theta}\approx\left.\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right|^{n+1/2}\approx\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+\theta}\approx\boldsymbol{u}^{n+1/2}$$

$$\boldsymbol{p}^{n+\theta}\approx\boldsymbol{p}^{n+1}$$

直接法に基づく安定化有限要素法

$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_\delta)\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}^{n+1/2})+\boldsymbol{K}_\delta(\boldsymbol{u}^{n+1/2}))\,\boldsymbol{u}^{n+1/2}$$

$$-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_\delta)\,\boldsymbol{p}^{n+1} + \frac{1}{R_e}\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{u}^{n+1/2} = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_\delta$$

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{M}_\epsilon\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t} + \boldsymbol{K}_\epsilon(\boldsymbol{u}^{n+1/2})\,\boldsymbol{u}^{n+1/2} - \boldsymbol{C}_\epsilon\,\boldsymbol{p}^{n+1} = \boldsymbol{F}_\epsilon$$

ここに, $\boldsymbol{u}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}^{n+1}+\boldsymbol{u}^n)$

直接法に基づく安定化有限要素法

$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_\delta)\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}^{n+1/2})+\boldsymbol{K}_\delta(\boldsymbol{u}^{n+1/2}))\,\boldsymbol{u}^{n+1/2}$$

$$-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_\delta)\,\boldsymbol{p}^{n+1} + \frac{1}{R_e}\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{u}^{n+1/2} = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_\delta$$

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{M}_\epsilon\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t} + \boldsymbol{K}_\epsilon(\boldsymbol{u}^{n+1/2})\,\boldsymbol{u}^{n+1/2} - \boldsymbol{C}_\epsilon\,\boldsymbol{p}^{n+1} = \boldsymbol{F}_\epsilon$$

ここに, $\boldsymbol{u}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}^{n+1}+\boldsymbol{u}^n)$

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

非線形方程式の解法

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{d}_0 \to \boldsymbol{d}_1 \to \cdots \to \boldsymbol{d}_k \to \boldsymbol{d}_{k+1} \to \cdots$$

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{d}_k) + \frac{\partial \boldsymbol{N}(\boldsymbol{d}_k)}{\partial \boldsymbol{d}}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}_k) + \cdots$$

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{d}_k) + \frac{\partial \boldsymbol{N}(\boldsymbol{d}_k)}{\partial \boldsymbol{d}}(\boldsymbol{d}_{k+1}-\boldsymbol{d}_k) = \boldsymbol{F}$$

Newton-Raphson法

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{d}}\right|_{\boldsymbol{d}_k}(\Delta \boldsymbol{d}_k) = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{d}_k)$$

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

線形化

$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_\delta)\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{K}(\underline{\boldsymbol{u}^{n+1/2}})+\boldsymbol{K}_\delta(\underline{\boldsymbol{u}^{n+1/2}}))\,\boldsymbol{u}^{n+1/2}$$

$$-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_\delta)\,\boldsymbol{p}^{n+1} + \frac{1}{R_e}\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{u}^{n+1/2} = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_\delta$$

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{M}_\epsilon\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t} + \boldsymbol{K}_\epsilon(\underline{\boldsymbol{u}^{n+1/2}})\,\boldsymbol{u}^{n+1/2} - \boldsymbol{C}_\epsilon\,\boldsymbol{p}^{n+1} = \boldsymbol{F}_\epsilon$$

Adams-Bashforth法

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{3}{2}\boldsymbol{u}^n - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{n-1}$$

反復計算が不要(計算時間の短縮化)

離散化とプログラミングの詳細
続・有限要素法による流れのシミュレーション、丸善、2012(5章)

Computational Mechanics Subcommittee 『いまさら聞けない 計算力学の常識』講習会@土木学会

まとめ

☆ 直接法：

・陰解法→微小時間増分量は分離型解法に比べて大きくとれる
定常的な問題には計算時間の点で有利

・有限要素法以外ではあまり採用されていない（文化の違い？）

・有限要素法の場合，基本的には流速と圧力に異なる補間関数（混合補間関数）を用いる混合補間を適用する必要がある（安定化有限要素法を用いれば同次補間要素が適用できる）

☆ 分離型解法：

・準陽解法→記憶容量は直接法に比べて少ない
→微小時間増分量に制約がある
ただし、非定常的な問題には計算時間の点で有利

・圧力の境界条件が必要となる

・有限要素法の場合，同次補間要素を用いることができる

・有限差分法，有限体積法でよく採用されている

2. 流れ問題の離散化の要点

2.1 移流・拡散方程式の離散化の要点（13話）

2.2 Navier－Stokes方程式の離散化の要点（14話）

2.3 メッシュ分割や要素選択の要点（15話）
- ・要素の違いが解に及ぼす影響
- ・メッシュ分割の留意点
- ・解析領域の設定の留意点

2.4 固体・構造解析との類似点・相違点

第15話 流れ解析における要素選択とメッシュ分割の心得

話のポイント：
・流れ解析における「要素」、「メッシュ」、「解析領域の設定」の違いが解析結果に及ぼす影響と解析に際しての留意点を理解する

1. 要素の違いが解に及ぼす影響を理解しよう
2. メッシュ分割の留意点
3. 解析領域の設定をしよう

執筆担当：田中聖三（ノートルダム大）、高瀬慎介（計算力学研究センター）
樫山和男（中央大学）

要素の位相の違いによる比較

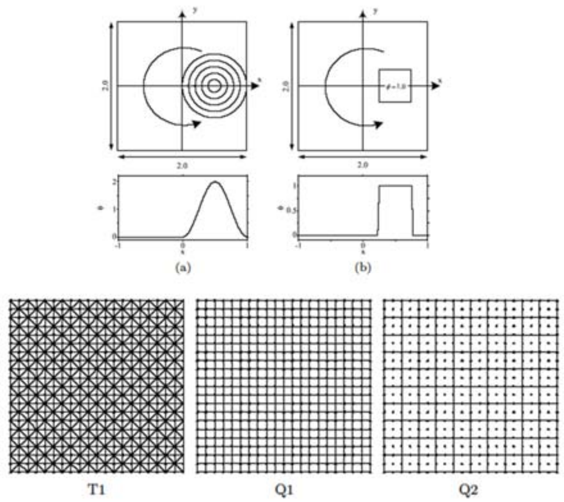


図 1.2 解析に用いたメッシュ（節点間隔 $h = 0.1$）

要素の位相の違いによる比較

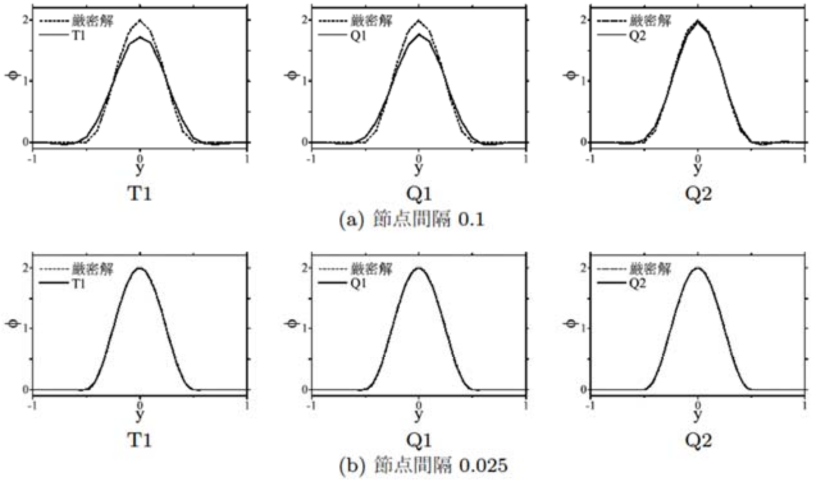


図 1.3　$x = 0.5$ での ϕ の分布 (コーン形状)

要素の位相の違いによる比較

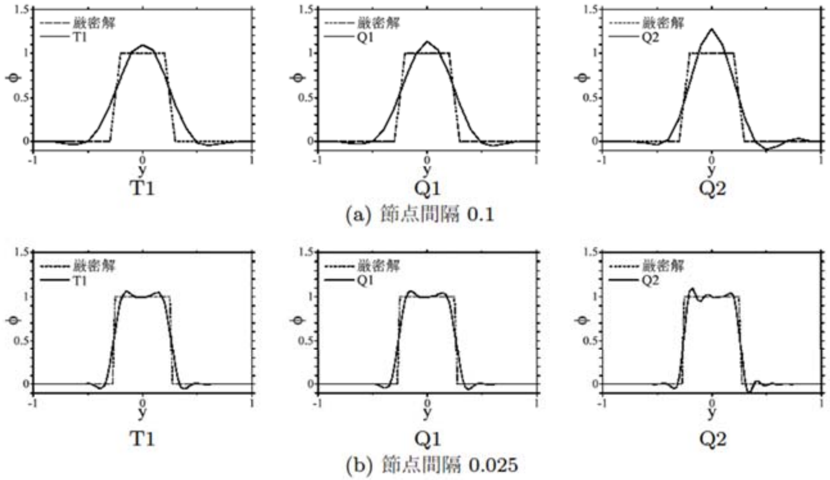


図 1.4　$x = 0.5$ での ϕ の分布 (直方体形状)

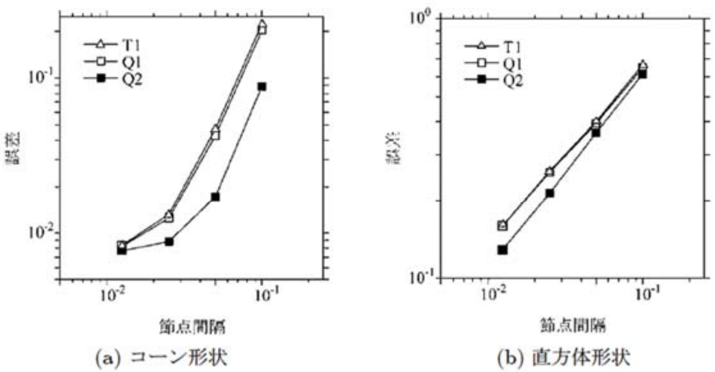
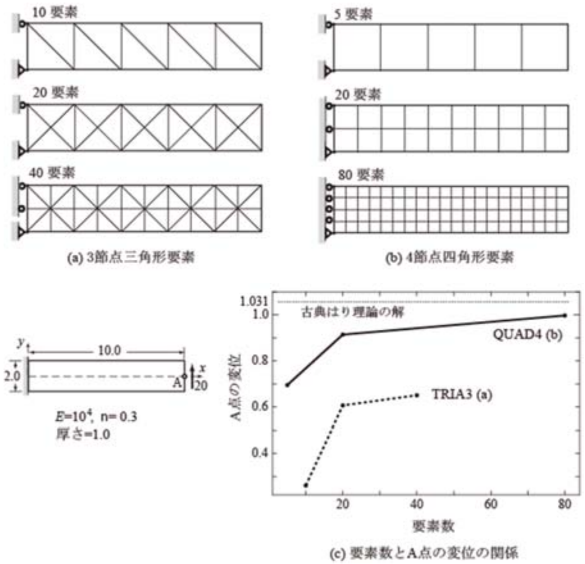


図 1.5　誤差の比較

・T1要素とQ1要素とでは精度の差異は認められない
・物理量の分布が滑らかな場合、Q2要素とQ1要素とでは高次要素の優位性が見られるが、物理量の分布が不連続な場合には、高次要素は不連続面近傍で数値振動が発生する

構造解析との違い



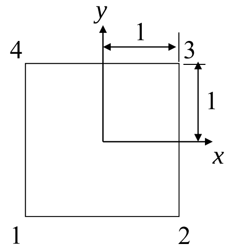
竹内、樫山、寺田:計算力学、森北出版(2003)

要素の性能

なぜ、四角形要素が固体の曲げ問題に精度が良いか？

要素の基本変形モード

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &\approx \hat{u}(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v(x,y) &\approx \hat{v}(x,y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy \end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{aligned} \hat{u}(x_1,y_1) &:= u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 + a_4 x_1 y_1 \\ \hat{u}(x_2,y_2) &:= u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 + a_4 x_2 y_2 \\ \hat{u}(x_3,y_3) &:= u_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 + a_4 x_3 y_3 \\ \hat{u}(x_4,y_4) &:= u_4 = a_1 + a_2 x_4 + a_3 y_4 + a_4 x_4 y_4 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

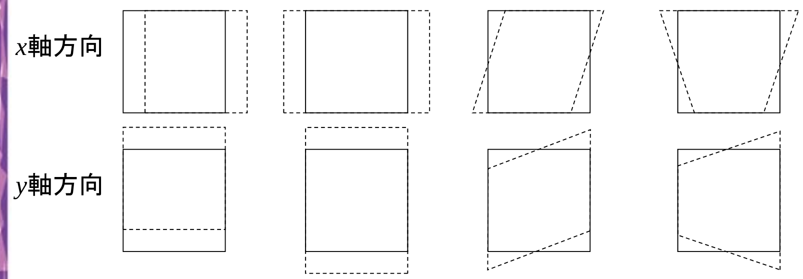
x軸方向の基本変形モード

要素の性能

x軸方向の基本変形モード

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

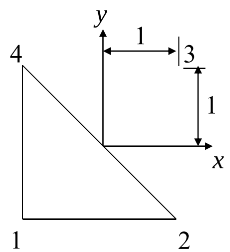
剛体移動　一軸引張　せん断　曲げ



要素の性能

要素の基本変形モード

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &\approx \hat{u}(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v(x,y) &\approx \hat{v}(x,y) = b_1 + b_2 x + b_3 y \end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{aligned} \hat{u}(x_1,y_1) &:= u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 \\ \hat{u}(x_2,y_2) &:= u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 \\ \hat{u}(x_3,y_3) &:= u_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

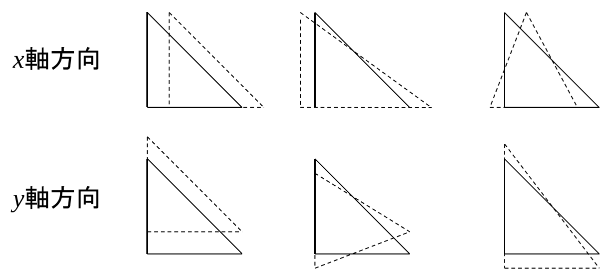
x軸方向の基本変形モード

要素の性能

x軸方向の基本変形モード

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

剛体移動　擬似せん断1　擬似せん断2



境界層に必要なメッシュ分割パターンはどれくらい？

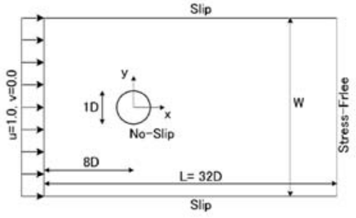


図 1.6　円柱周り流れ解析モデル図

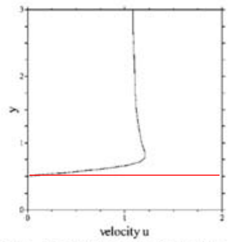


図 1.7　流速の x 方向成分の分布 (図 1.6 の $x=0$ の断面)

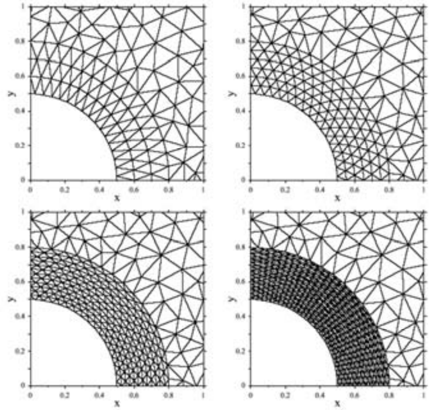


図 1.8　円柱近傍メッシュ図 (左上:Mesh1, 右上:Mesh2, 左下:Mesh3, 右下:Mesh4)

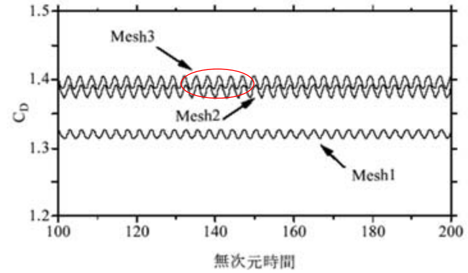


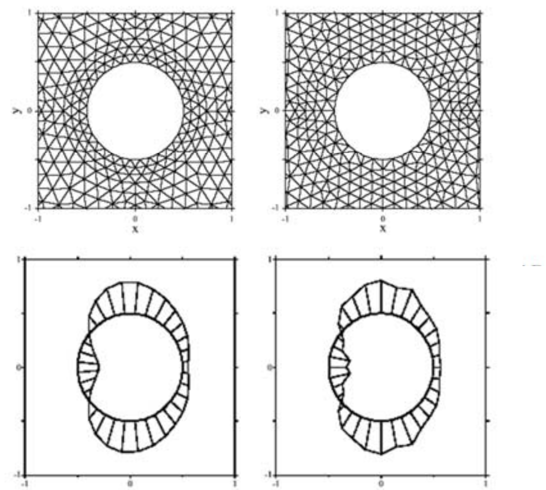
図 1.9　抗力係数の時刻歴

表 1.1　各メッシュでの抗力係数

名前	半径方向の分割幅	境界層の分割数（概数）	抗力係数
Mesh1	$0.1D$	2.5	1.3200
Mesh2	$0.05D$	5	1.3828
Mesh3	$0.025D$	10	1.3956
Mesh4	$0.0125D$	20	1.3985

境界層に対して必要な分割数は、最低でも5分割程度である

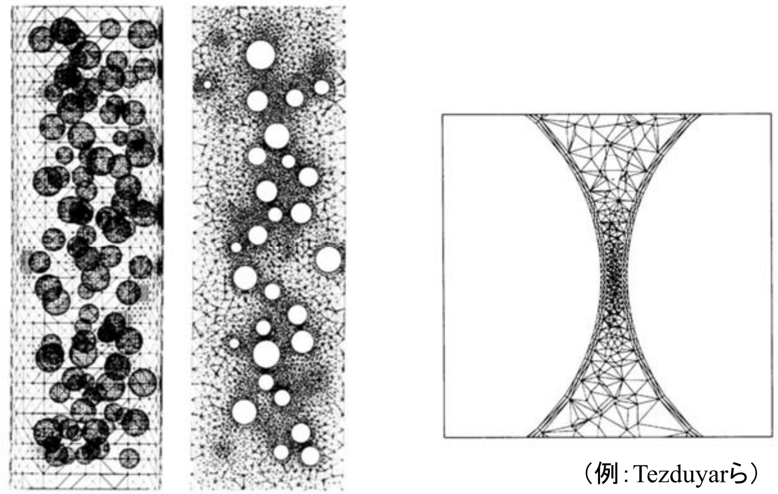
メッシュ分割パターンにも留意しよう



物体表面付近は構造格子で分割することが望ましい

要素の使用例

流体構造連成問題では物体近傍は構造格子を用いている



（例：Tezduyarら）

解析領域の設定の影響

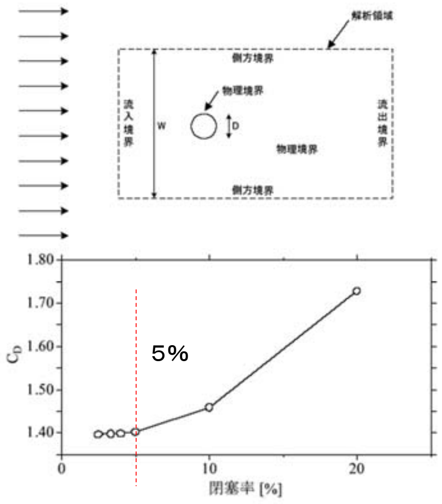


図 1.14 閉塞率と抗力係数の平均値

まとめ

- 要素の位相による違いはあまりない．→**複雑な解析領域に対しては三角形要素または四面体要素を用いてもよい**
- 高次要素は一般に精度は良いが，**低次要素に対する優位性は顕著ではない**
- 解の不連続性を含むような問題では，高次要素には数値振動が顕著に現れるので，低次要素を用いるほうが望ましい
- 境界層に対しては，最低でも**5要素以上**を用いて分割する
- 物体近傍のメッシュパターンは**構造メッシュ**が望ましい
- 開領域に対する流れ問題において，人為的に設置する開境界は，その影響が内部の領域に及ぼさない程度離して設置するのが望ましい
（側方境界に対して10D，流入境界に対して5D，流出境界に対して15D以上）

2. 流れ問題の離散化の要点

2.1 移流・拡散方程式の離散化の要点（13話）

2.2 Navier－Stokes方程式の離散化の要点（14話）

2.3 メッシュ分割や要素選択の要点（15話）

2.4 固体・構造解析との類似点・相違点

固体・構造解析と流体解析の類似点・相違点

	固体・構造解析	流体解析
現象の記述	Lagrange記述	Euler記述→移流項の存在
支配方程式		双曲型が多い
境界条件	閉じた境界条件が多い	境界位置が明確でない場合が多い→開いた境界条件が多い
変形	流体に比べ変形しにくい（分子間の結合力が強い）	固体に比べ変形しやすい→容易に3次元性が現れる。低Re数の場合のみ2次元解析が可能
離散化	Galerkin有限要素法	双曲型の場合は安定化有限要素法
要素の位相	4角形要素（2次元）、6面体要素（3次元）が多い	3角形要素（2次元）、4面体要素（3次元）が比較的多い
要素の次数	低次要素、2次要素（3角形要素、4面体要素）が多い	要素の位相によらず低次要素が多い
要素分割	流体解析に比べて粗い	固体・構造解析に比べてかなり細かい→高Re数になるほど

参考文献

有限要素法による流体解析をより詳しく勉強されたい方へ

続・有限要素法による流れのシミュレーション,
日本計算工学会編, 丸善, 2012
・ソースコード付きで離散化の過程を詳しく解説
・最近の成果（自由表面流れ、固体ー流体連成解析、
乱流の変分マルチスケール理論など）について解説