MDMモデルを用いた時間領域での地震波の非線形引戻し解析手法の提案

中部電力（株） 技術開発本部 正会員 熊崎 幾太郎

1. はじめに

地盤のある深度における観測地震波を入力して，それより下の深度における地震波を求める解析，すなわち地震波の引戻し解析には，地盤材料の動的変形特性を等価線形化して取り込み，周波数領域で解析対象系の支配方程式を解く手法が多く用いられている．この解析手法を用いている代表的な地震応答解析コードとしては，SHAKEがある．しかし，この解析手法では，地盤応答の非線形性が強い場合の引戻し解析結果が観測地震波と大きく異なる場合のあることが知られている．一方，地盤材料の繰返し応力～ひずみ関係を履歴モデルによって直接考慮し，時間領域で解析対象系の運動方程式を解くことにより引戻し解析を行う方法[1)]の場合は，等価線形化による近似誤差は無いものの，引戻し解析結果の精度が地盤材料の動的変形特性の履歴モデル化方法に影響される．

そこで，本稿においては，非線形順解析により多数の地点のアレー観測地震波を高精度に再現シミュレーションできた実績[2)]のあるMDMモデルを地盤材料の履歴モデルとして用いる．そして，MDMモデルを用いた時間領域での地震波の非線形引戻し解析手法を提案する．

2. MDMモデルを用いた時間領域での非線形引戻し解析手法

解析対象地盤を自由度nの直列型の質点系と見なしたとき，基盤入力地震動，すなわち地動に対する系の運動方程式は次式により表される．

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C]\{\dot{x}(t)\}+[K(t)]\{x(t)\}=-\ddot{y}(t)[M]\{1\} \qquad (1)$$

ここに，$\{\ddot{x}(t)\}$，$\{\dot{x}(t)\}$，$\{x(t)\}$はそれぞれ地動に対する経過時間tでの相対加速度ベクトル，相対速度ベクトル，相対変位ベクトル，$\{1\}$は要素がすべて1のベクトル，$\ddot{y}(t)$は経過時間tにおける地動の加速度である．また，$[M]$は非対角要素がすべて0であるn次の正方質量マトリックス，$[C]$は非線形性による履歴減衰を含まない系に固有の材料減衰マトリックス，$[K(t)]$は経過時間tにおける局所剛性マトリックスである．

式(1)や後述する式(5)，(7)，(11)の$[K(t)]$は，提案する非線形引戻し解析手法においては簡単のため，次に述べる方法を用いて逐次計算のステップ毎に定める．すなわち，系のn個の層における経過時間tでの局所せん断剛性$g(t)_i$ $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$を次式(2)によって求める．具体的には，MDMモデルの要素シミュレーションプログラムにより各層の中心位置で生成される繰返しせん断応力t～せん断ひずみg関係曲線上のデータから式(2)を用いて求める．次に，各層の局所せん断剛性$g(t)_i$の値を各層厚で割ることにより，式(3)で定義する$k(t)_i$ $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$へ換算する．そして，求められた$k(t)_i$の値を用いることにより，$[K(t)]$の要素を算定する．

$$g(t)_i=\left(\frac{\Delta t}{\Delta g}\right)_i=\left(\frac{t(t)-t(t-\Delta t)}{g(t)-g(t-\Delta t)}\right)_i \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n) \qquad (2)$$

$$k(t)_i=\left(\frac{\Delta t}{\Delta u}\right)_i=\left(\frac{t(t)-t(t-\Delta t)}{u(t)-u(t-\Delta t)}\right)_i \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n) \qquad (3)$$

ここに，$t(t)$，$g(t)$，$u(t)$はそれぞれ経過時間tにおけるせん断応力，せん断ひずみ，層間変位であり，$t(t-\Delta t)$，$g(t-\Delta t)$，$u(t-\Delta t)$はそれぞれ経過時間$t-\Delta t$におけるせん断応力，せん断ひずみ，層間変位である．

一方，系の地表面位置から深さ方向に数えてk番目（$i=k$）の節点における経過時間tでの絶対加速度$\overset{\cdot\cdot}{x}(t)_k$，相対加速度$\ddot{x}(t)_k$と地動の加速度$\ddot{y}(t)$の間には，次式の関係がある．

$$\ddot{y}(t)=\overset{\cdot\cdot}{x}(t)_k-\ddot{x}(t)_k \qquad (4)$$

よって，上式を式(1)に代入して整理すると，次式(5)の形の運動方程式が得られる．非線形順解析の場合は，式(1)の地動の加速度$\ddot{y}(t)$を既知として入力することにより解を求めるが，非線形引戻し解析の場合は，次式(5)の観測地震波の加速度$\overset{\cdot\cdot}{x}(t)_k$を既知として入力することにより解を求める．

$$[\tilde{M}]\{\ddot{x}(t)\}+[C]\{\dot{x}(t)\}+[K(t)]\{x(t)\}=-\overset{\cdot\cdot}{x}(t)_k[M]\{1\} \qquad (5)$$

ここに，$[\tilde{M}]$は次式(6)を満足するようなn次の正方質量マトリックスであり，0以外の非対角要素を含む．具体的には，$[\tilde{M}]$のi行j列の要素を$\tilde{m}(i,j)$，$[M]$のi行j列の要素を$m(i,j)$と表記すれば，$[\tilde{M}]$の$i\neq k$の要素は，$\tilde{m}(i,i)=m(i,i)$，$\tilde{m}(i,k)=-m(i,i)$であり，これら以外の要素はすべて，$\tilde{m}(i,j)=0$である．

キーワード MDMモデル，時間領域，非線形引戻し解析，アレー地震観測記録，再現シミュレーション
連 絡 先 〒459-8522 名古屋市緑区大高町字北関山20-1 TEL.052-621-6101 FAX.052-623-5117

$$\left[\tilde{M}\right]\left\{\ddot{x}(t)\right\}=-\ddot{x}(t)_k\left[M\right]\left\{1\right\}+\left[M\right]\left\{\ddot{x}(t)\right\} \tag{6}$$

提案手法では，式(5)をWilson θ法によって解く．そのために，式(5)を$q\cdot\Delta t$という間の増分運動方程式として書くと，次式になる．

$$\left[\tilde{M}\right]\left\{\Delta\ddot{x}(t)\right\}+\left[C\right]\left\{\Delta\dot{x}(t)\right\}+\left[K(t)\right]\left\{\Delta x(t)\right\}=-q\cdot\left(\ddot{\bar{x}}(t+\Delta t)_k-\ddot{\bar{x}}(t)_k\right)\left[M\right]\left\{1\right\} \tag{7}$$

ここに，$\left\{\Delta\ddot{x}(t)\right\}$，$\left\{\Delta\dot{x}(t)\right\}$，$\left\{\Delta x(t)\right\}$はそれぞれ経過時間$t$から$t+q\cdot\Delta t$に至る間の$\left\{\ddot{x}\right\}$，$\left\{\dot{x}\right\}$，$\left\{x\right\}$の増分である．

今，$T\quad(0\leq T\leq q\cdot\Delta t)$を局所的な時間とし，経過時間$t$から$t+q\cdot\Delta t$までの加速度の変化が次式により表されるものとする．

$$\left\{\ddot{x}(t+T)\right\}=\left\{\ddot{x}(t)\right\}+\frac{T}{q\cdot\Delta t}\left\{\Delta\ddot{x}(t)\right\} \tag{8}$$

これに基づき，増分加速度$\left\{\Delta\ddot{x}(t)\right\}$と増分速度$\left\{\Delta\dot{x}(t)\right\}$について，次式が得られる．

$$\left\{\Delta\ddot{x}(t)\right\}=\frac{6}{(q\cdot\Delta t)^2}\left\{\Delta x(t)\right\}-\frac{6}{q\cdot\Delta t}\left\{\dot{x}(t)\right\}-3\left\{\ddot{x}(t)\right\} \tag{9}$$

$$\left\{\Delta\dot{x}(t)\right\}=\frac{3}{q\cdot\Delta t}\left\{\Delta x(t)\right\}-3\left\{\dot{x}(t)\right\}-\frac{q\cdot\Delta t}{2}\left\{\ddot{x}(t)\right\} \tag{10}$$

式(9), (10)を式(7)に代入して整理すると，次式が導出される．

$$\begin{aligned}&\left(\left[K(t)\right]+\frac{6}{(q\cdot\Delta t)^2}\left[\tilde{M}\right]+\frac{3}{q\cdot\Delta t}\left[C\right]\right)\left\{\Delta x(t)\right\}\\&=\left[\tilde{M}\right]\left(\frac{6}{q\cdot\Delta t}\left\{\dot{x}(t)\right\}+3\left\{\ddot{x}(t)\right\}\right)-q\cdot\left(\ddot{\bar{x}}(t+\Delta t)_k-\ddot{\bar{x}}(t)_k\right)\left[M\right]\left\{1\right\}+\left[C\right]\left(3\left\{\dot{x}(t)\right\}+\frac{q\cdot\Delta t}{2}\left\{\ddot{x}(t)\right\}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

上式(11)を$\left\{\Delta x(t)\right\}$に関する連立方程式として解けば，増分変位$\left\{\Delta x(t)\right\}$が求められ，$\left\{\Delta x(t)\right\}$が求められれば，これを用いて，

$$\left\{\ddot{x}(t+\Delta t)\right\}=\frac{6}{q\cdot(q\cdot\Delta t)^2}\left\{\Delta x(t)\right\}-\frac{6}{q\cdot(q\cdot\Delta t)}\left\{\dot{x}(t)\right\}+\left(1-\frac{3}{q}\right)\left\{\ddot{x}(t)\right\} \tag{12}$$

$$\left\{\dot{x}(t+\Delta t)\right\}=\left\{\dot{x}(t)\right\}+\frac{\Delta t}{2}\left(\left\{\ddot{x}(t+\Delta t)\right\}+\left\{\ddot{x}(t)\right\}\right) \tag{13}$$

$$\left\{x(t+\Delta t)\right\}=\left\{x(t)\right\}+\Delta t\left\{\dot{x}(t)\right\}+\frac{(\Delta t)^2}{6}\left(\left\{\ddot{x}(t+\Delta t)\right\}+2\left\{\ddot{x}(t)\right\}\right) \tag{14}$$

により，$\left\{\ddot{x}(t+\Delta t)\right\}$，$\left\{\dot{x}(t+\Delta t)\right\}$，$\left\{x(t+\Delta t)\right\}$の値が求められる．従って，$\left\{g\,(t+\Delta t)\right\}$も定められる．この$\left\{g\,(t+\Delta t)\right\}$をMDMモデルの要素シミュレーションプログラムへ入力して$\left\{t\,(t+\Delta t)\right\}$を応答として定め，$\left[K(t+\Delta t)\right]$を求めておく．なお，出力結果として，系の地表面位置から深さ方向に数えてi番目（$i\neq k$）の節点における絶対加速度$\ddot{\bar{x}}_i$の解が必要なときは，まず，最初から既知としていた$\ddot{\bar{x}}_k(t+\Delta t)$と，解として求められた$\ddot{x}_k(t+\Delta t)$を$\ddot{y}(t+\Delta t)=\ddot{\bar{x}}_k(t+\Delta t)-\ddot{x}_k(t+\Delta t)$という関係式に代入して，地動の加速度（基盤の加速度）$\ddot{y}(t+\Delta t)$の解を求める．その次に，$\ddot{x}_i(t+\Delta t)$の解と，既知となった$\ddot{y}(t+\Delta t)$を$\ddot{\bar{x}}_i(t+\Delta t)=\ddot{x}_i(t+\Delta t)+\ddot{y}(t+\Delta t)$という関係式に代入すれば，$\ddot{\bar{x}}_i(t+\Delta t)$の解が求められる．これで，逐次計算の１ステップを完了し，次のステップへ進む．

3．まとめ

本稿では，系の地表面位置から深さ方向に数えてk番目（$i=k$）の節点の深度において観測された絶対加速度$\ddot{\bar{x}}_k$の時刻歴を既知として入力し，その節点よりも下の深度にある節点の絶対加速度の時刻歴などを解として求められる時間領域での非線形引戻し解析手法を提案した．繰返し応力～ひずみ関係を履歴モデルによって直接考慮する従来の非線形引戻し解析手法と本稿で提案した非線形引戻し解析手法で異なる点は，①履歴モデルにMDMモデルを用いていること，②運動方程式の定式化において局所剛性法を用いていること，③運動方程式の解法としてWilson θ法を用いていることである．なお，本稿で提案した非線形引戻し解析手法は，MDMモデル以外の履歴モデルを用いる場合にも適用可能である．

参考文献

1)酒井 久和，澤田 純男，土岐 憲三：時間領域での基盤入力地震動の推定法に関する基礎的研究，土木学会論文集 No. 577，I-41，pp.53-64，1997．
2)虎谷 健司，熊崎 幾太郎，恒川 和久，今枝 靖博：MDMによる多地点のアレー観測記録の再現解析と液状化判定およびSHAKEとの比較，日本建築学会大会学術講演梗概集，No. 20213，pp. 425-426，2002．