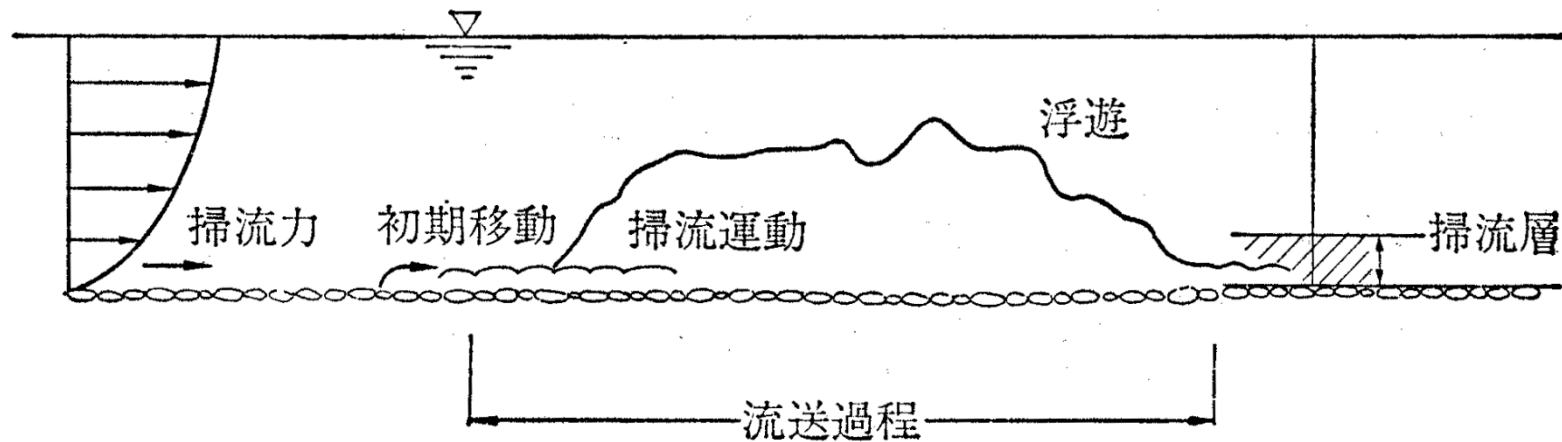
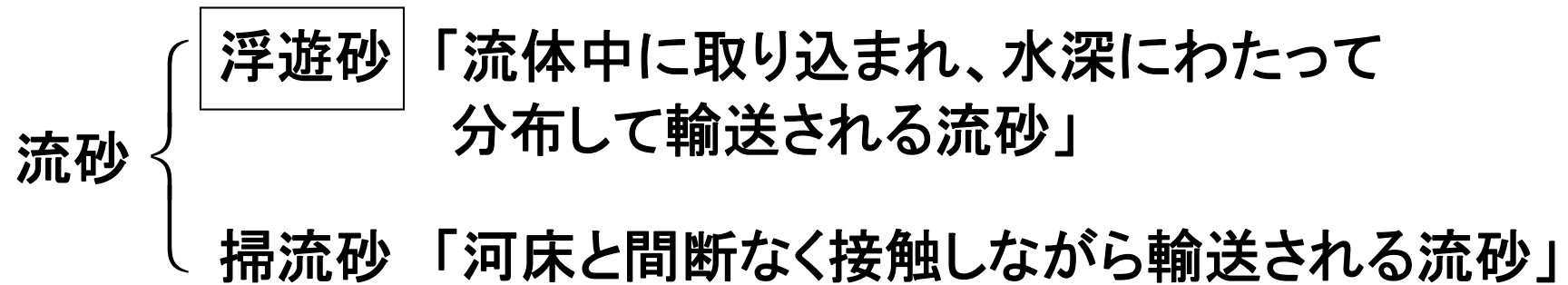


浮遊砂の運動を拡散過程 として扱えるのか？

新潟大学農学部
権田豊

1. 浮遊砂についての従来の考え



本日の結論

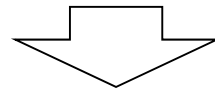
従来の考え

浮遊砂＝流体の乱れの影響を強く受けたランダム運動

——→ 拡散現象(確率論的な運動)としての取り扱い

掃流砂＝初期条件(境界条件)の影響が支配的な運動

——→ 決定論的な運動としての取り扱い



浮遊砂の運動に対しても、境界条件の及ぼす影響は無視できず。場合によっては、乱れによる拡散の影響が小さく、その一連の運動が、境界条件のみで決まってしまう場合もありうる。

話の流れ

1. 浮遊砂の拡散モデルの従来の解釈
2. 急勾配粗面上の浮遊砂濃度分布
3. 拡散モデルの持つ本当の意味
4. 数値シミュレーションによる
沈降性粒子の拡散過程の検討
5. 浮遊砂の運動は拡散係数一定
の拡散過程として扱えるのか？

1. 浮遊砂の拡散モデルについて

浮遊砂の運動 $\xrightarrow{\text{直感的}}$ 乱流拡散(の一種)

◎Rouseの拡散モデル

$$\boxed{\varepsilon_s \frac{\partial C}{\partial y}} + \boxed{w_0 C} = 0 \cdots (1)$$

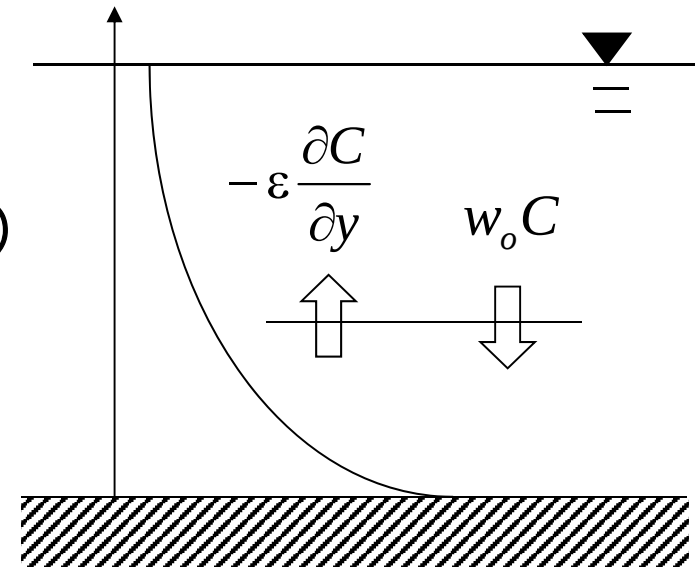
↑
拡散による
フラックス

↓
沈降による
フラックス

C : 浮遊砂濃度

w_0 : 浮遊砂の平均沈降速度

ε_s : 通称「浮遊砂の拡散係数」



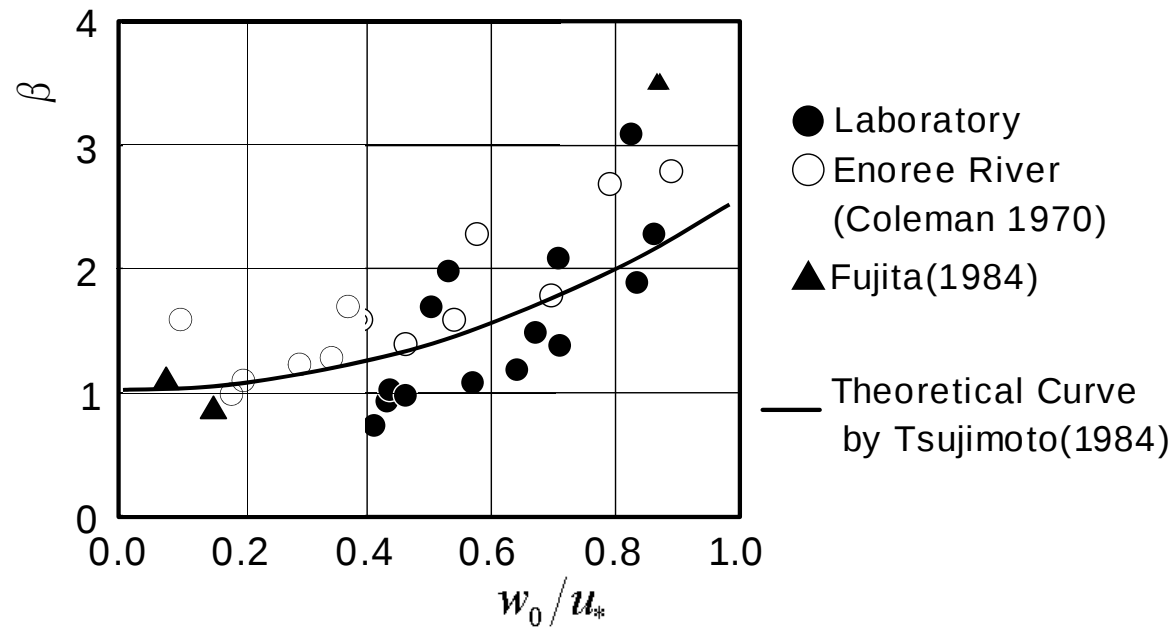
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

図-1 拡散モデルの概図

$$\varepsilon_s = \beta \varepsilon_m \cdots (2) \quad \beta \rightarrow 1 (w_0/u_* \rightarrow 0) \cdots (3)$$

ε_m : 流れの運動量拡散係数

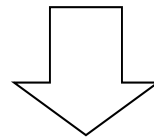
β : 浮遊砂の乱れへの追随性をあらわすパラメータ



2.急勾配粗面上の浮遊砂の実験的検討 (権田、太田、宮本1993)

流砂材料に比べて著しく大きな粗度が河床に存在する急勾配粗面水路を用い、理論河床上に堆砂の見られない固定床とみなせる条件で浮遊砂を含む流れの実験をおこなった。

水への追随性をあらわすパラメータ w_0/u_* が十分に小さく $\varepsilon_s \approx \varepsilon_m$ ($\beta \approx 1$) であることが期待される実験条件



結果を拡散モデルで評価

粒径 $d=0.1\text{mm}$, $d=0.2\text{mm}$ の砂を給砂。勾配 $1/10$ - $1/50$ 。

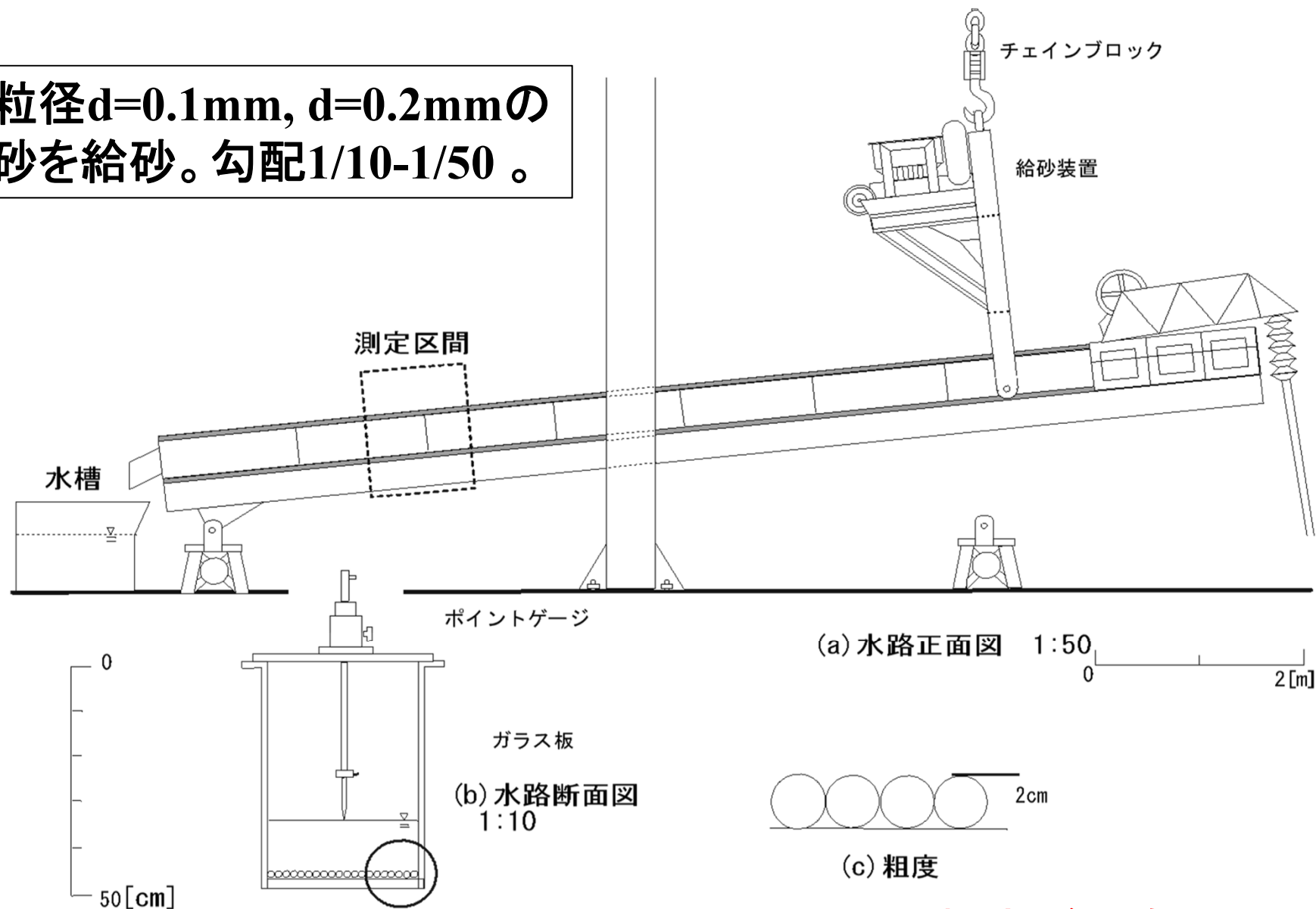
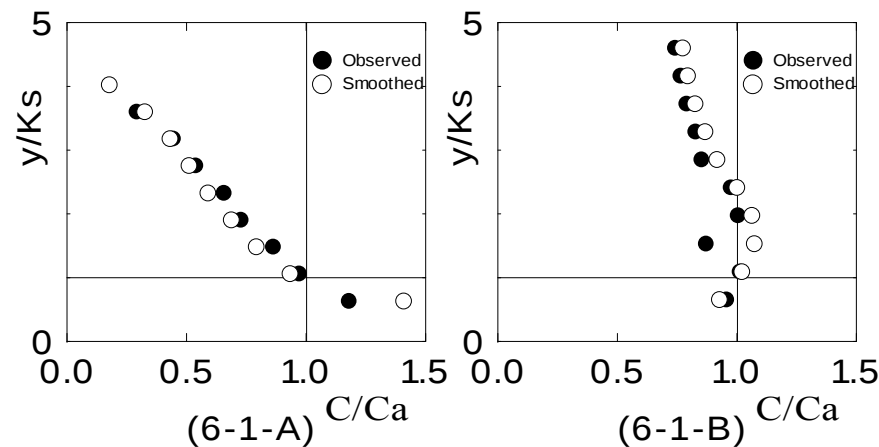


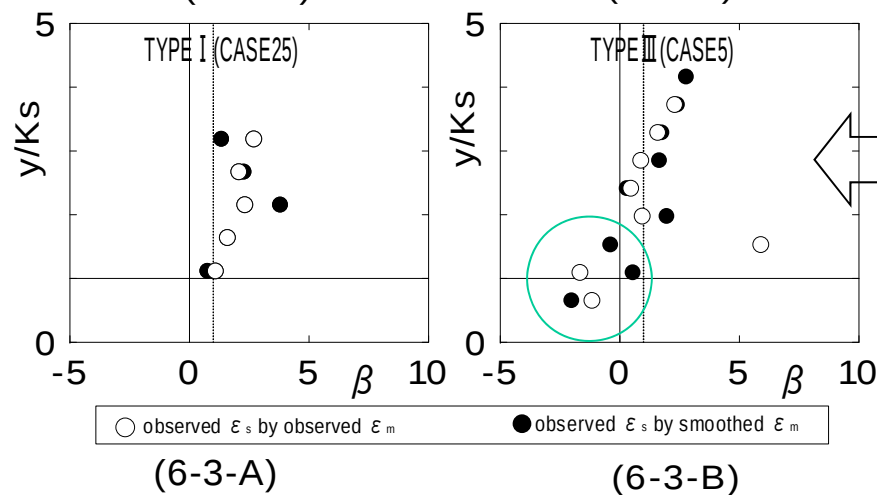
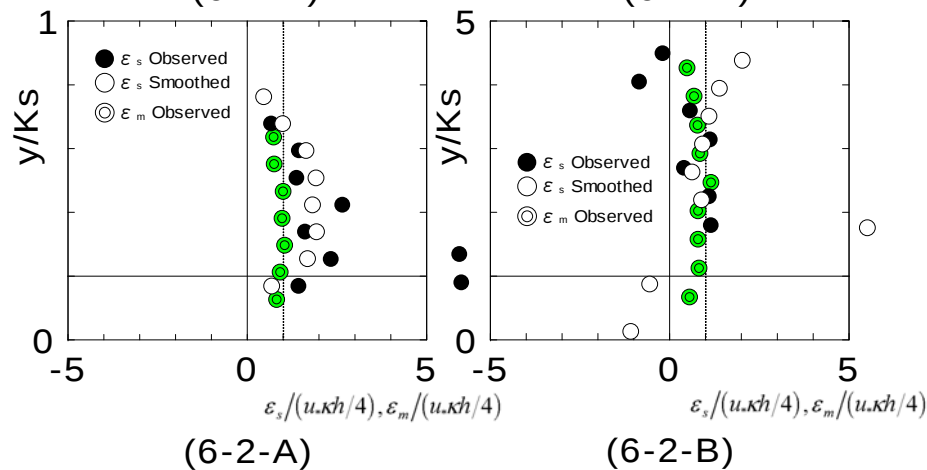
図-1-1 実験装置

粗度が完全には埋
まらない条件で実験

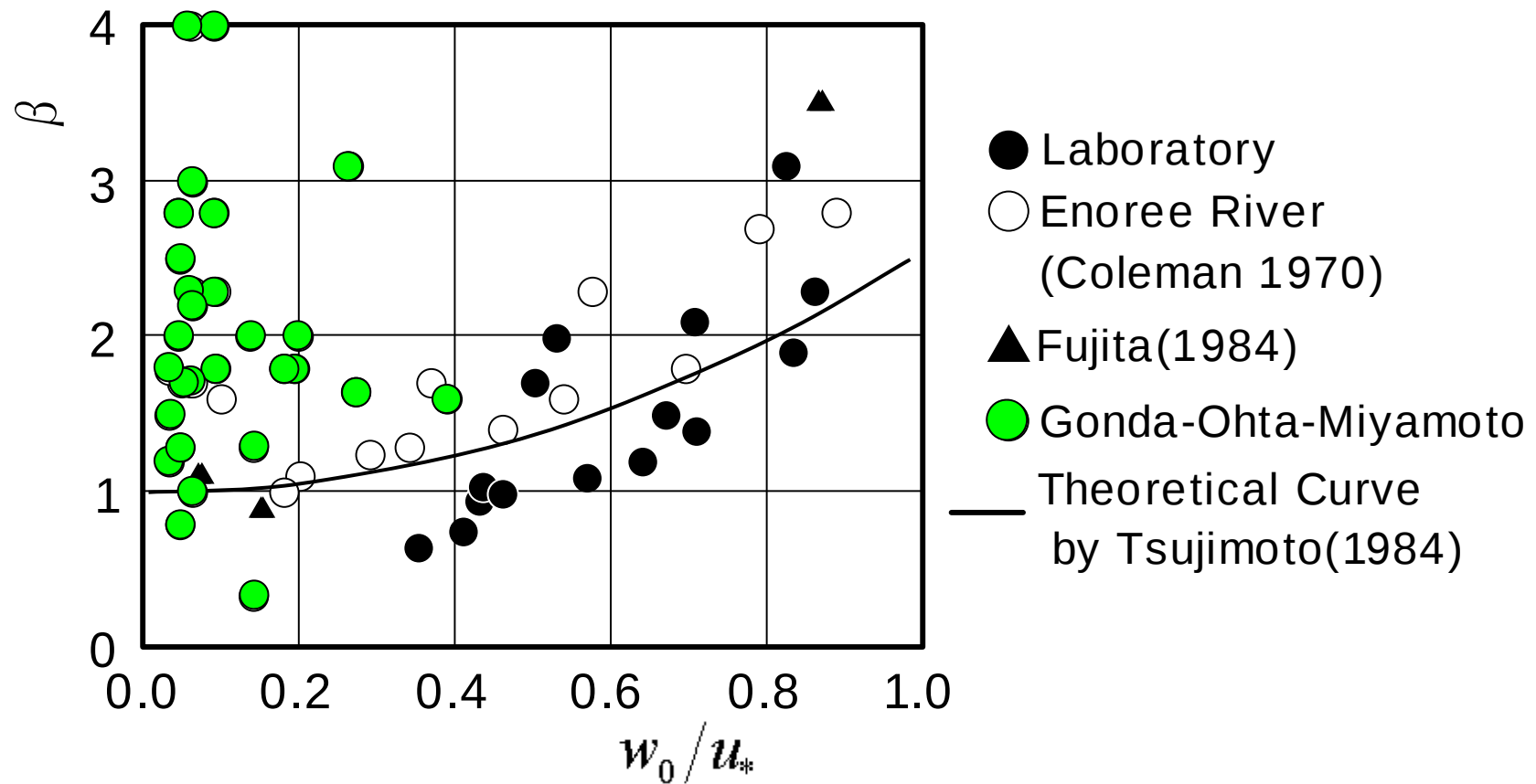
ε_s が ε_m よりも
大きい? →



河床付近の
濃度勾配が逆転



β は水深方向に変化
 β 河床近傍では「負の値」
になるという物理的に意
味のないケースも!



β の変化 (藤田 1984に加筆)

3. 浮遊砂の拡散モデルとは一体何か？

- ・浮遊砂の拡散モデルの持つ物理的な意味の検討

- ー浮遊砂の拡散モデルは浮遊砂の運動を拡散として取り扱っているのかー

- ・「浮遊砂」の運動の取扱いについての吟味

- ー浮遊砂の運動を拡散現象として扱うためにはー

—— 仮定 ——

浮遊砂は平均的に一定速度で沈降し、乱流拡散する。

3. 1 拡散とLagrange的な質量保存則(拡散方程式)

「拡散」=ある母集団に属する粒子群の位置(重心からの相対的な変位)の統計的分散が時間とともに増大する現象

「拡散係数」=重心からの相対的な変位の統計的分散の時間変化率

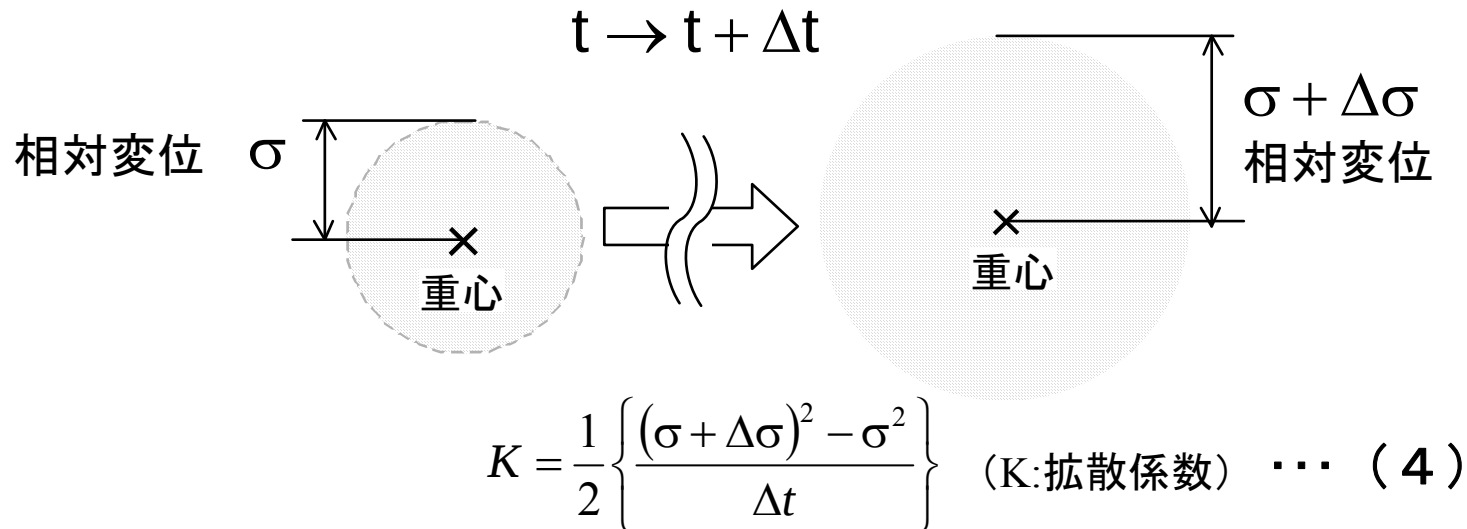


図-5 拡散係数

◎Lagrange的な質量保存則

$$\frac{d}{dt} \int_D C_m dV = \frac{d}{dt} \int_D S_m dV - \oint_A \boxed{\vec{q}_m} \cdot \vec{n} dS \quad \dots \quad (5)$$

C_m : 物質の濃度 S_m : 内部湧き出し

$\vec{q}_m$: 領域Dの境界面Aを通過して
出入りする物質のフラックス

$\vec{n}$: 境界面に垂直な単位ベクトル

※ C_m 、 S_m 、 $\vec{q}_m$ は空間平均量

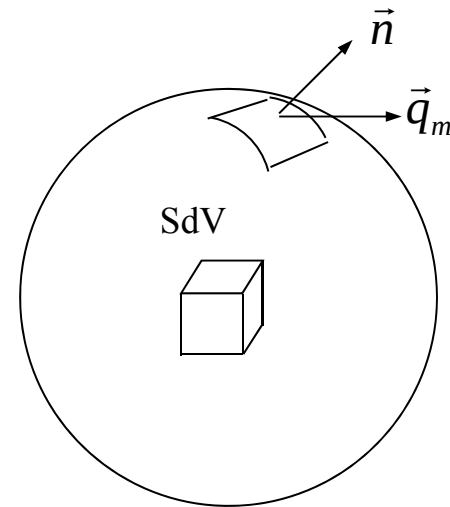


図-6 境界面Aをもつ領域D

(領域Dの平均速度 u_{cv}) = (領域Dに含まれる粒子の平均速度 u_p)
のとき、(境界面Aからの物質のフラックス) = (拡散によるフラックス)

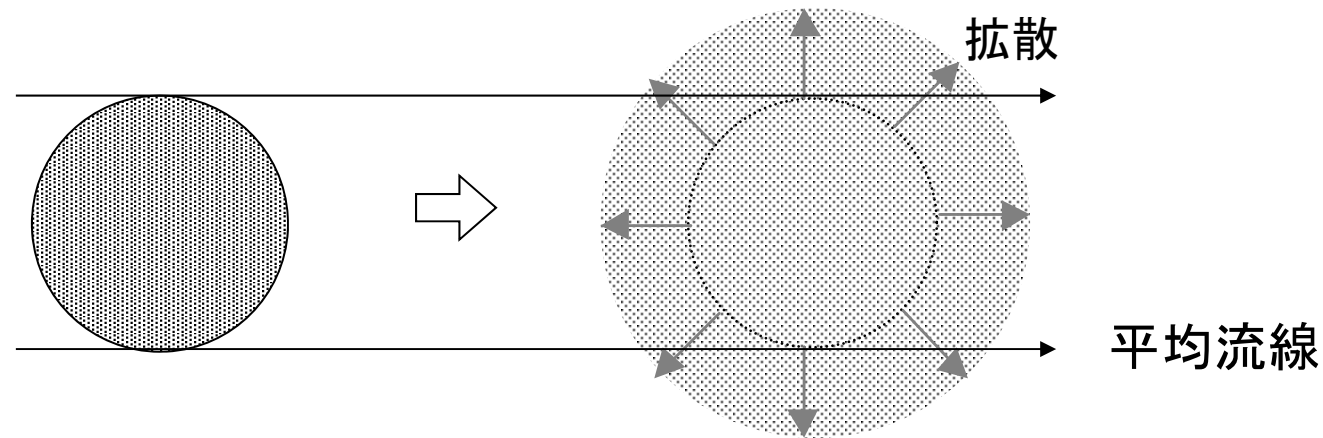


図-7 コントロールボリュームと拡散

拡散係数 K を一定値とすれば、Fickの法則より

$$\vec{q}_m = -K\nabla C \quad \cdots (6)$$

$\nabla \vec{u} = 0$ の条件の下で、領域Dを微小領域dvにとると
次式の拡散方程式が導かれる。

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \boxed{u_p} \frac{\partial C}{\partial x} + \boxed{v_p} \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\boxed{K} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\boxed{K} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + S$$

u_p, v_p : 粒子の平均速度 ... (7)

流体に十分に追従する 粒子の場合 (etc 染料)	粒子の平均速度 → 流体の平均速度 粒子の拡散係数 → 流体の拡散係数
------------------------------	--

空間全体にわたり一様な流速U
を持つ流れ場を想定。
右図のように座標系を導入

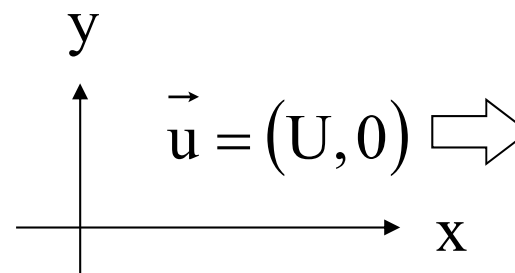


図- 8 座標系

流体に十分に追従する
粒子の拡散方程式

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_m \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_m \frac{\partial C}{\partial y} \right) + S \cdots (8)$$

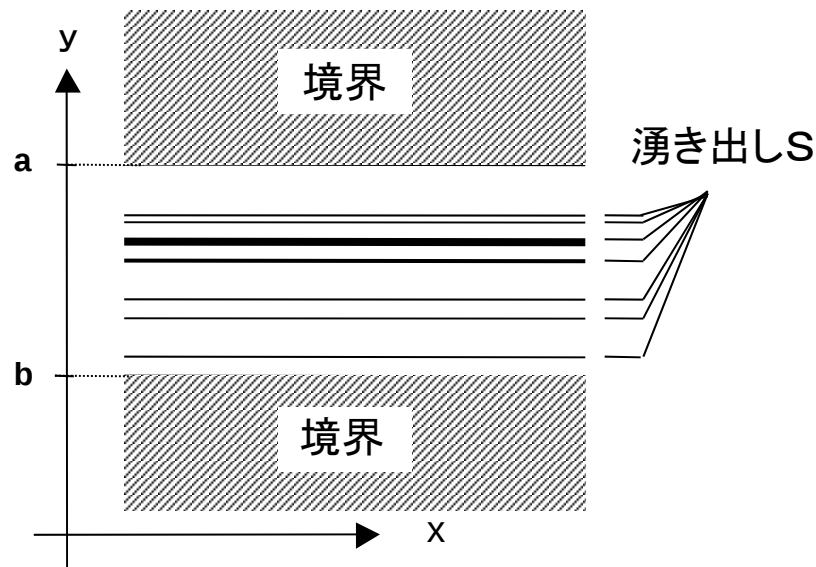
ε_m : 流れの乱流拡散係数

ここで、 $\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \cdots (9)$ が成立する条件を考える。

1) 恒等的に式(9)が満たされる場合

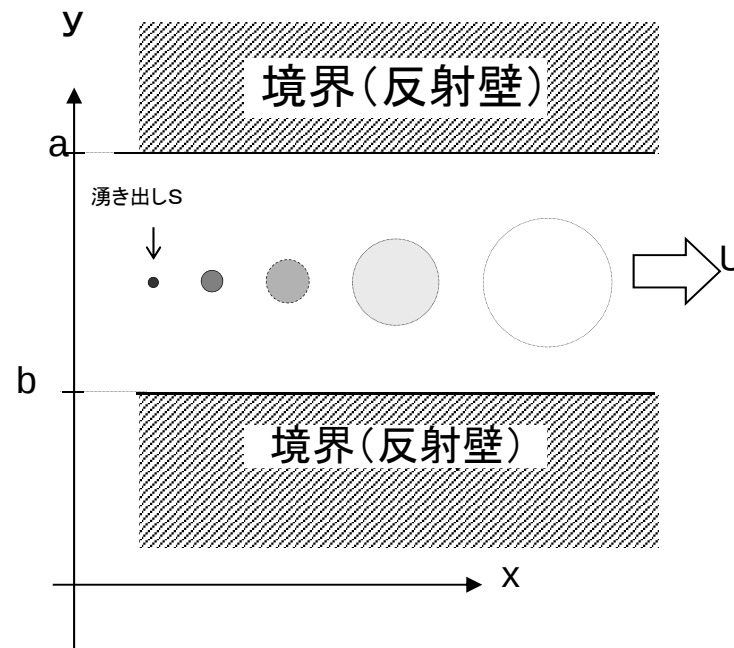
$$C_m = const \quad S_m \equiv 0 \quad \cdots (10)$$

2) 式(9)が近似的に満たされる場合



$$S(t, x, y) = S(y) \quad \int_a^b S(y) dy = 0$$

十分長い時間の経過後 ... (11)



$$S(t, x, y) = S_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

湧き出し点から、流下方向に
十分長い距離離れている地点 ... (12)

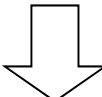
式(9)が満たされるためには境界と湧きだし $S(y)$ が
特定の条件を満たしていなければならない

3. 2浮遊砂の拡散方程式と拡散モデル

浮遊砂の拡散方程式

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} - w_0 \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_s \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_s \frac{\partial C}{\partial y} \right) + S \dots \quad (13)$$

K_s : 浮遊砂の拡散係数

変形 

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(K_s \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_s \frac{\partial C}{\partial y} \right)} + \boxed{S - w_0 \frac{\partial C}{\partial y}} \dots \quad (14)$$

||
流体を基準とした
物質微分


①


②

①. 拡散係数Kについて

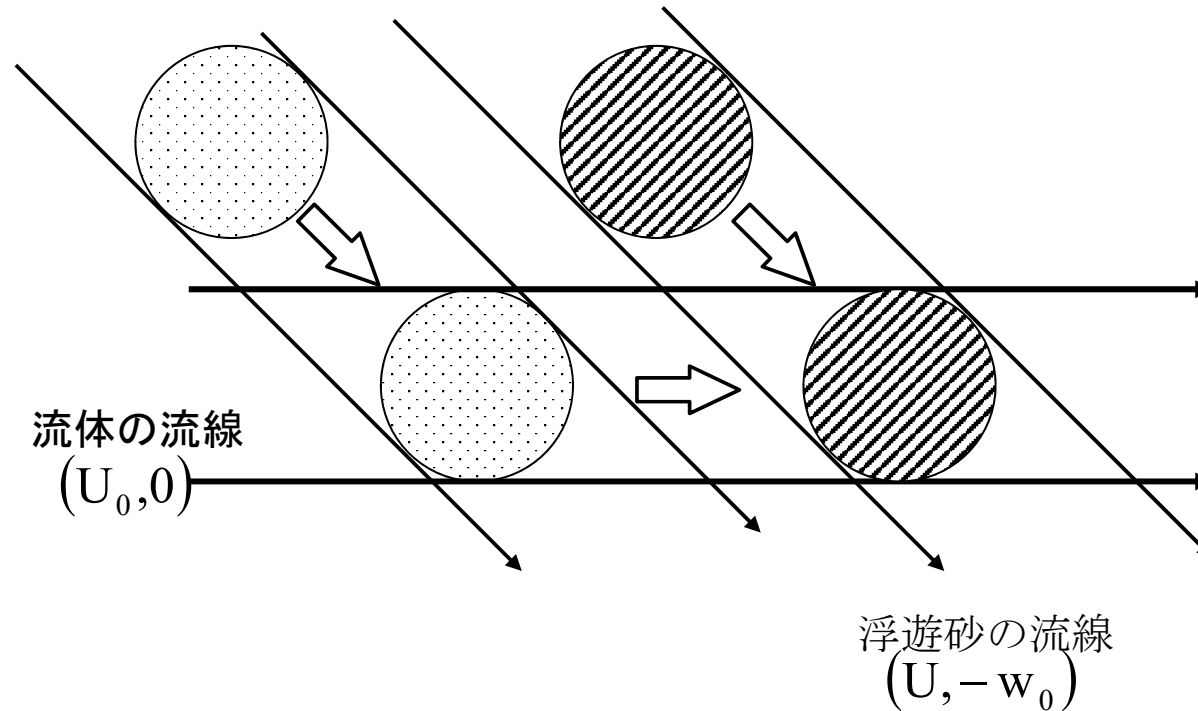
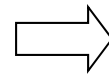


図-9 浮遊砂と流体の流線の違い

流体とともに運動する観測者は
浮遊砂を追跡不能



浮遊砂の拡散係数と流体の拡
散係数とは本質的に異なる

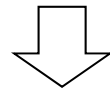
浮遊砂の拡散係数は、浮遊砂をLagrange的に追跡し
なければ評価できない。

②. 湧きだしSについて

流体とともに運動する観測者には、
浮遊砂の鉛直方向の移流成分が
湧きだしとして観察される

$$S + \boxed{w_0 \frac{\partial C}{\partial y}}$$

① + ② $\Rightarrow$ 式(13)には流れ場を基準として評価できない、2つのパラメータが存在



・流れが定常かつ浮遊砂が平衡の状態(式(9))の
浮遊砂濃度Cを観測しているだけでは、浮遊砂の拡散
係数 K_s 、湧きだしSを評価することはできない。

仮定:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

$$C \neq 0$$

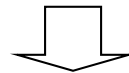
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial}{\partial y} \right) + w_0 \frac{\partial C}{\partial y} + S = 0 \quad \cdots (15)$$

比較 $\Updownarrow$

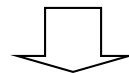
浮遊砂の拡散モデルを
yについて微分

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_s \frac{\partial}{\partial y} \right) + w_0 \frac{\partial C}{\partial y} + 0 = 0 \quad \cdots (16)$$

従来の説明されているように浮遊砂の拡散モデルのパラメータ ε_s が「浮遊砂の拡散係数」であれば、浮遊砂の拡散モデルでは、恒等的に $S \equiv 0$ としていることになる。



$\partial C / \partial t = \partial C / \partial x = 0$ が満たされるためには、十分長い時間が必要
河床と水面が存在するような2次元流れでは、十分に長い時間
が経過した後、全ての浮遊砂は河床へ沈降



矛盾

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad C = 0$$

拡散モデルの係数 ε_s はどのようなパラメータなのか？

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial C}{\partial y} \right) + w_0 \frac{\partial C}{\partial y} + S = 0$$

↓ 適当な条件で y について積分

$$K \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C + \int S dy = C_1 \quad (C_1: \text{積分定数})$$

↓ 上の式と拡散モデルの差をとり ε_s について整理

$$\varepsilon_s = K + \left(\int S dy - C_1 \right) / \frac{\partial C}{\partial y} \quad \dots (17)$$

$$= f(K, S)$$

$$\neq \beta \varepsilon_m$$

3. 6結論

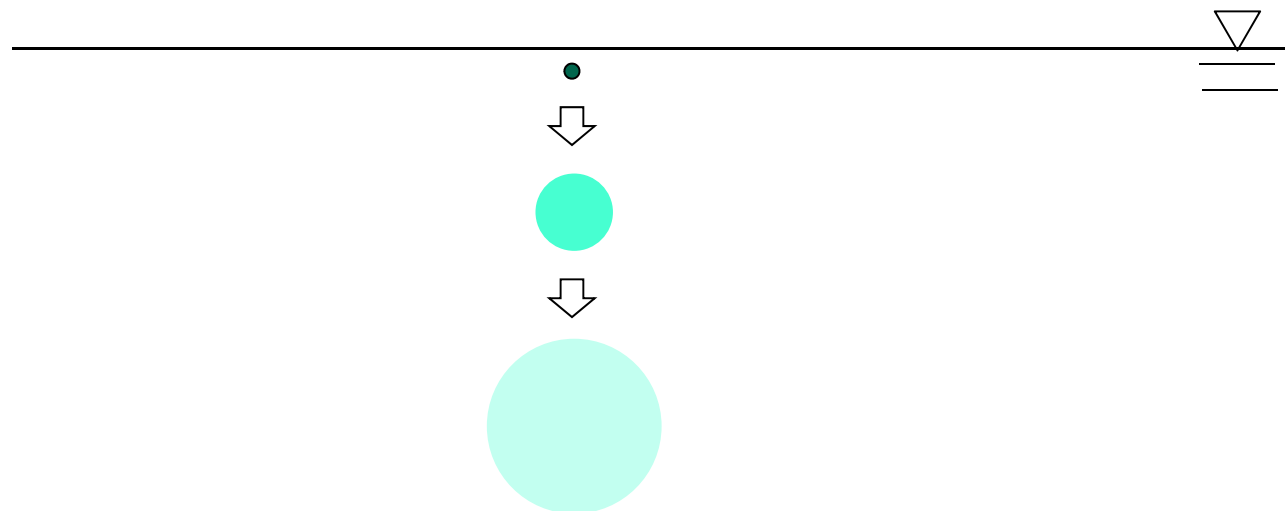
- ・浮遊砂の拡散モデルのパラメータ ε_s は、従來說明されていたような、「浮遊砂の拡散係数」ではなく、境界条件に応じて変化するパラメータ。

- ・浮遊砂の運動を拡散として評価するためには、浮遊砂の拡散係数 K_s および境界条件(湧きだし) $S(y)$ をそれぞれ評価する必要がある。→湧きだし S とは一体何か???

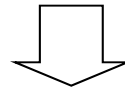
- ・流れが定常かつ浮遊砂が平衡の条件で、流れ場の浮遊砂濃度を測定しただけでは、浮遊砂の拡散係数 K は評価できない。浮遊砂の拡散係数は浮遊砂をLagrange的に追跡し、評価すべき。
→浮遊砂の拡散係数はどの程度の値なのか？浮遊砂は拡散現象として取り扱えるのか？

4. 単純な数値シミュレーションによる浮遊砂の拡散過程についての考察

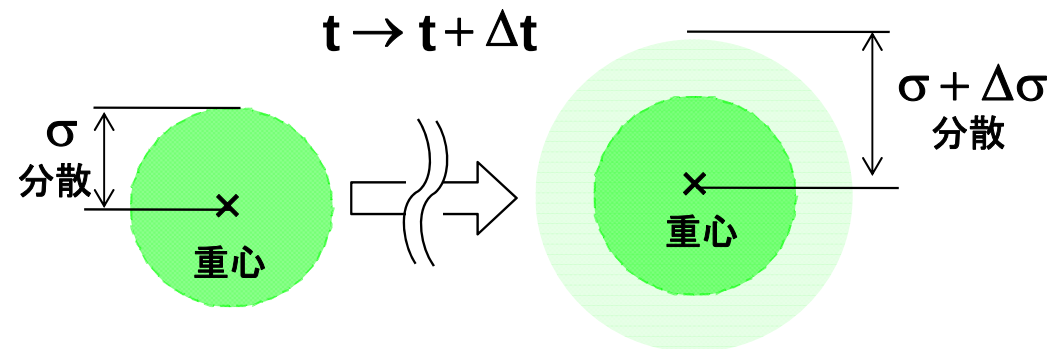
無限大の広さをもち、粒子に作用する流体の乱れが至る所で均質な、非常に単純化された場において、ある瞬間に初期速度0で運動を開始した、沈降性粒子群の鉛直1次元方向の運動を、個々の粒子の運動を運動方程式を数値解析的に解き追跡



拡散＝粒子群が個々の粒子の**不規則な運動**により重心まわりに**不可逆的に広がる**現象



粒子の位置の統計的分散が時間とともに増加する現象



拡散係数＝粒子の位置の統計的分散の時間変化率

1次元(Y軸方向)のみで粒子群を考えると

$$K_p(t) = \frac{1}{2} \frac{d \overline{Y_p'^2(t)}}{dt} \quad \dots (1)$$

K_p : 拡散係数 Y_p : 粒子の位置 t : 追跡時間

$Y_p = \bar{Y}_p + Y_p'$ $\bar{\quad}$: アンサンブル平均, $'$: 平均からの偏差

◎仮定・・・粒子の乱れの統計的性質が定常

$$\frac{d\overline{v_p'^2(t)}}{dt} = 0 \cdots (2)$$

$$\frac{d\overline{v_p'(t)v_p'(t+\eta)}}{dt} = 0 \cdots (3)$$

v_p : 粒子の速度 $\overline{v_p}$: 粒子の速度の統計平均値 v_p' : 乱れ速度

乱れの
自己相関 $R(t, \eta) = R(\eta) = \overline{v_p'(t)v_p'(t+\eta)} / \overline{v_p'(t)^2} \cdots (4)$

乱れの積分
時間スケール $T_p = \int_0^\infty R(\eta) d\eta \cdots (5)$

$$K_p = \frac{1}{2} \frac{d\overline{Y_p'^2}}{dt} = \begin{cases} \overline{v_p'^2} t & t \ll T_p \\ \overline{v_p'^2} T_p & t \gg T_p \end{cases}$$

$$\boxed{K_p} = \frac{1}{2} \frac{d \overline{Y_p'^2}}{dt} = \begin{cases} \overline{v_p'^2} t & t \ll T_p \\ \overline{v_p'^2} T_p & t \gg T_p \end{cases}$$

乱れの自己相関 $R(t, \eta) = R(\eta) = \overline{v_p'(t) v_p'(t + \eta)} / \overline{v_p'(t)^2}$

乱れの積分時間スケール $T_p = \int_0^\infty R(\eta) d\eta \cdots (5)$

- ・拡散係数は**追跡時間 t の関数**
- ・粒子群の運動を拡散係数一定値の現象として取り扱うためには、

$$t \gg T_p$$

が満たされることが必要

解析のねらい

浮遊砂の運動＝拡散係数が**追跡時間に依存しない**拡散現象

$$t \gg T_p : \text{必要条件}$$

しかし、浮遊砂粒子群の運動の素過程は、

- ・有限時間で終了
- ・粒子の乱れの統計的性質が定常に達するのにある程度の時間を要する.

①粒子の乱れの積分時間スケール

②粒子の乱れの統計的性質が定常に達するまでの時間

③拡散係数が一定値と見なせるまでの時間

④最終的な拡散係数(乱流拡散係数と同程度なのか?)

◎非常に単純化された乱流場

個々の粒子が受ける乱れは独立、粒子同士の相互作用無し

$$v_{fi} = \sigma_v \gamma_i(\Delta t)$$

σ_v : 乱れ強度 Δt : 乱れの作用時間、

※このとき $T_f = \Delta t/2$ $\gamma(\Delta t)$: 継続時間 Δt 平均0分散1の、生起確率が一律な矩形乱数波を生成する関数

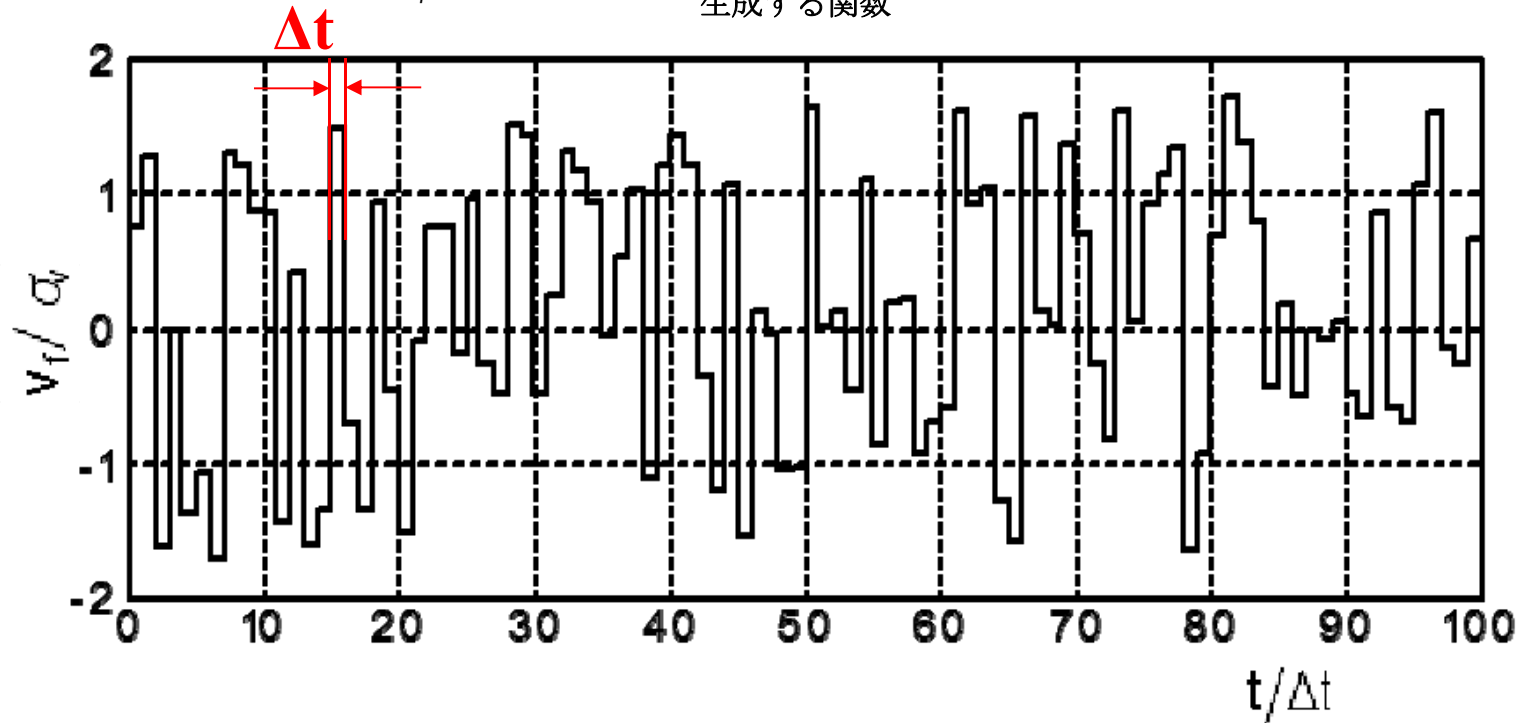


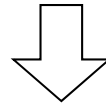
図-1 流体の乱れの時系列データの一例

Figure 1 An example of change of fluctuation velocity of fluid

◎運動方程式

$$\begin{aligned} (\rho_p + C_M \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_p}{dt} = & (\rho_p - \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} g - \frac{1}{2} \rho_f C_D \frac{\pi d^2}{4} (v_p - v_f) |v_p - v_f| \\ & + \rho_f (1 + C_M) \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_f}{dt} + K_L(t) + K_B(t) \end{aligned}$$

ρ : 密度, d : 粒子の粒径, t : 時間, g : 重力加速度, C_D : 抗力係数, C_M : 仮想質量係数(=0.5)



乱れのモデルに合わせ単純化

$$(\rho_p + C_M \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_p}{dt} = (\rho_p - \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} g - \frac{1}{2} \rho_f C_D \frac{\pi d^2}{4} (v_p - v_f) |v_p - v_f|$$

$$C_D = 24/\text{Re}_p + 0.4$$

数値計算

計算条件

$$\rho_p = 2.65 \quad N = 40000 [\text{個}]$$

u_*/w_0

$$d = 0.1, 0.5, 1.0, 5.0, 10.0 [\text{mm}] \quad \times 5$$

$$\sigma_v/v_{p0} = 0.803, 1.07, 1.61, 3.21, 8.03 \quad \times 5$$

$$\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001 [\text{SEC}] \quad \times 3$$

合計75ケース

計算手順

本計算

初期条件 ($t=0$ 、 $v_p=0$)

$$d\overline{v_p}/dt = 0 \quad d\overline{v_p'^2}/dt = 0$$

$dK_p/dt = 0$ が十分長い時間
満たされていること
が確認されるまで計算

後処理

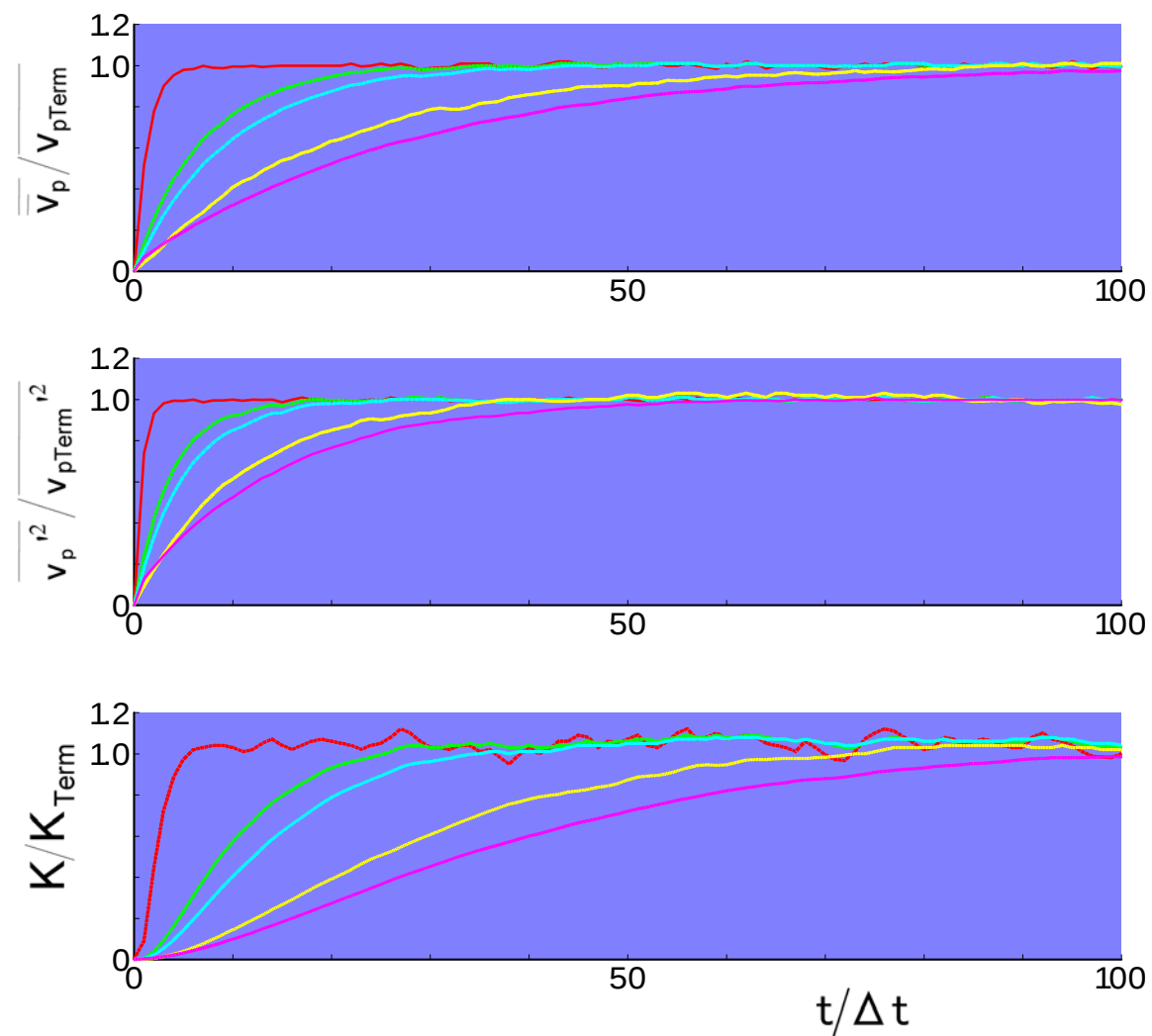
計算の最終時間の統計量

$$\overline{v_p}, \overline{v_p'^2}, \overline{v_f'^2}, K_{pTerm}, K_{fTerm}$$

から次式により T_p, T_f を評価

$$T_p = K_{pTerm} / \overline{v_p'^2}$$

$$T_f = K_{fTerm} / \overline{v_f'^2}$$



$\Delta t = 0.001$ [sec] , $\sigma_v / v_{p0} = 8.03$

$d=0.1$ [mm] $d=1$ [mm] $d=10$ [mm]
 $d=0.5$ [mm] $d=5$ [mm]

図-1 粒子運動の統計量の時間変化

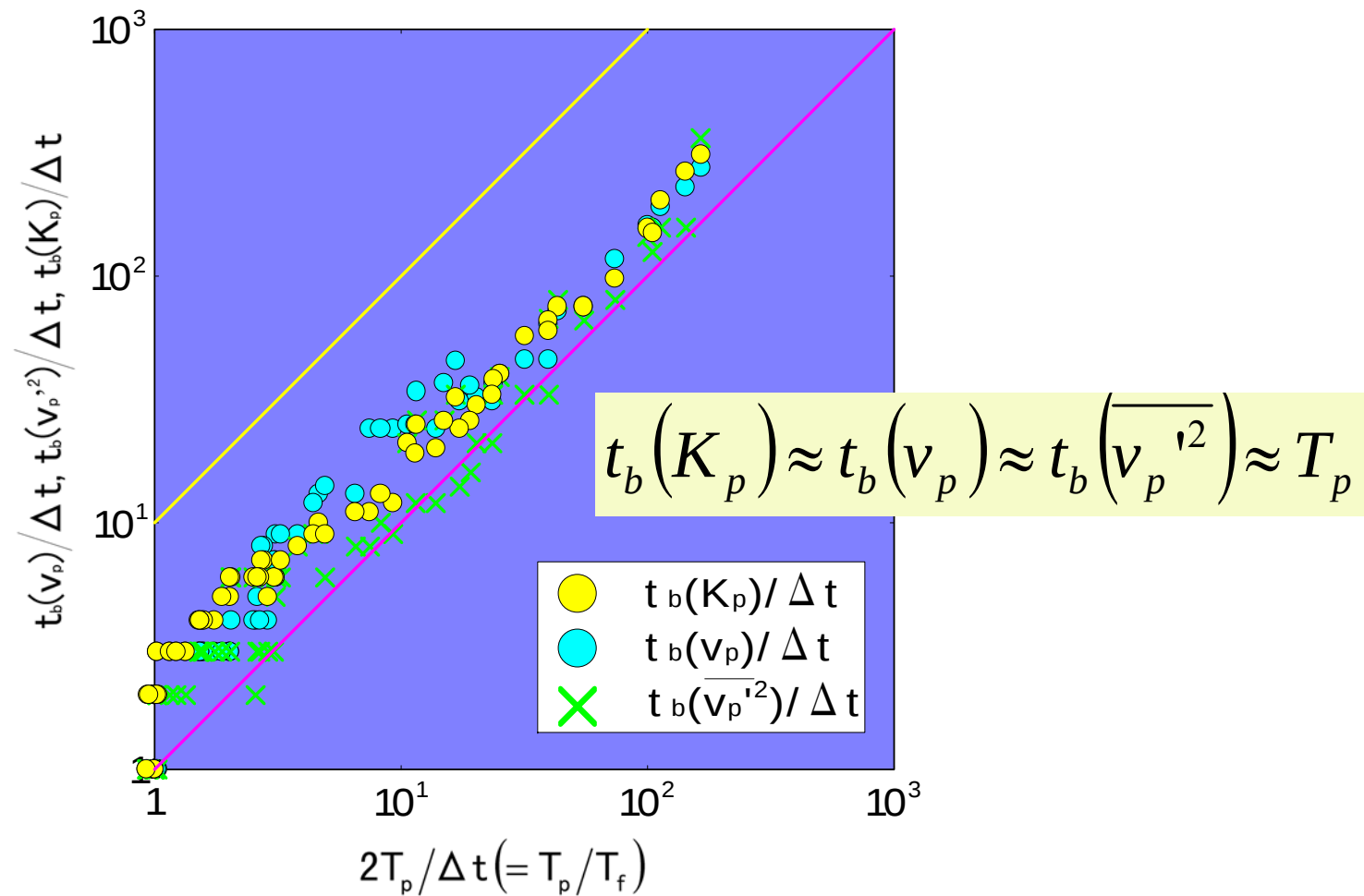
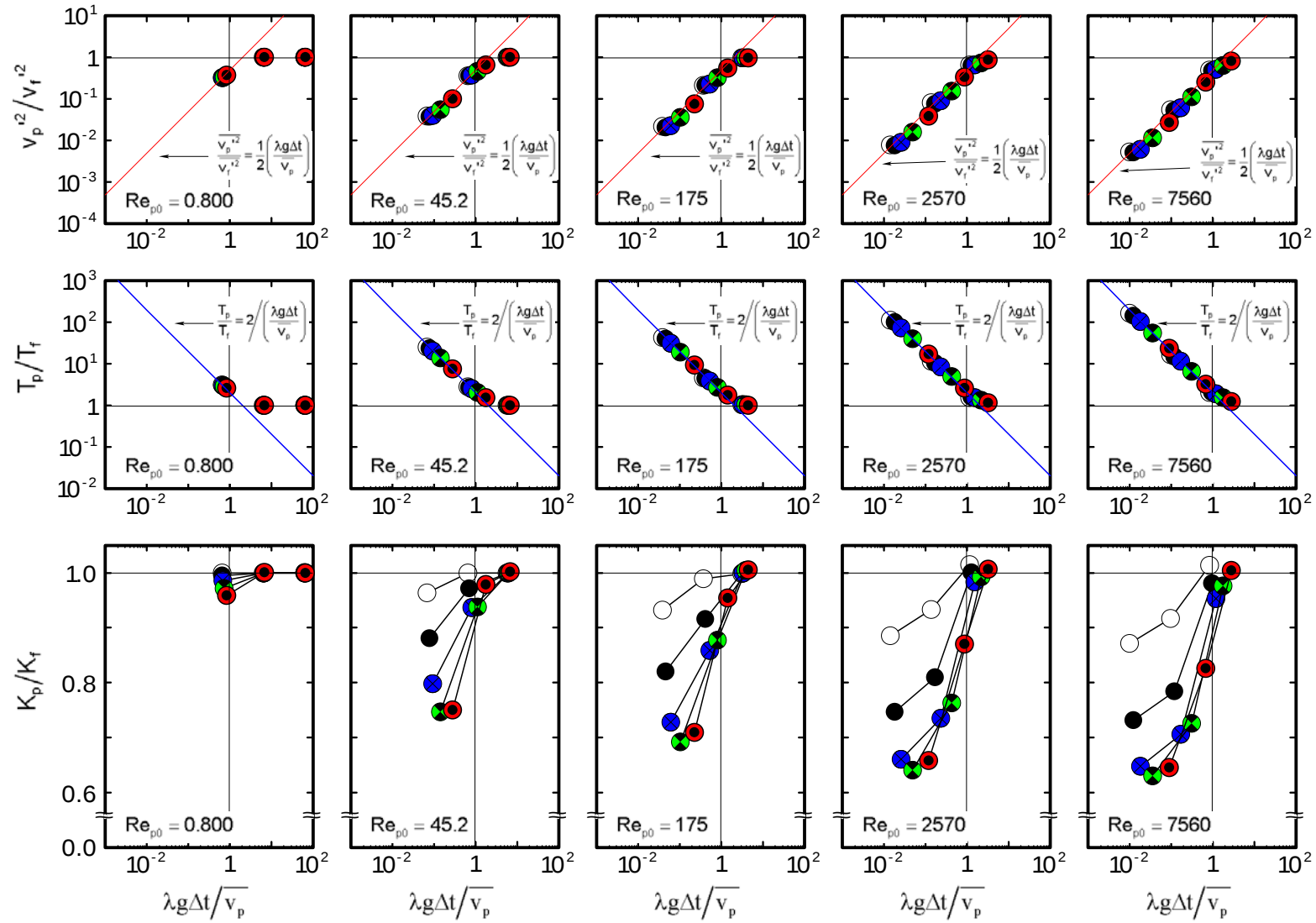


図-2 粒子運動の統計的性質が定常に達するまでの時間と乱れの積分時間スケールの関係

・ 沈降性粒子群の運動は、**追跡時間が粒子の乱れの積分時間スケールと比べ十分に大きい場合**，初期条件によらず拡散係数一定値の拡散現象として取り扱うことができる。



○ $\sigma_v/v_{p0} = 0.803$ ● $\sigma_v/v_{p0} = 1.07$ ⊗ $\sigma_v/v_{p0} = 1.61$ ⊗ $\sigma_v/v_{p0} = 3.21$ ⊗ $\sigma_v/v_{p0} = 8.03$

Legend is common to all graphs

$$\frac{\lambda g \Delta t}{v_{p0}} = \Delta t / \left(\frac{v_{p0}}{\lambda g} \right)$$

Δt : 乱れの作用時間

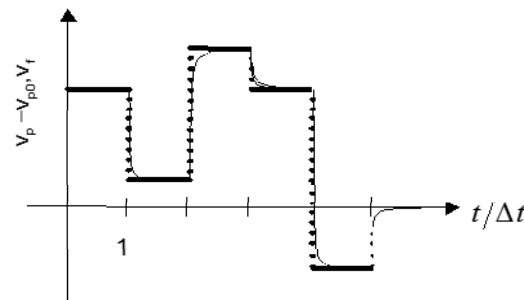
$$\frac{v_{p0}}{\lambda g}$$

粒子が、重力の作用で、流体に対し、相対速度
0から v_{p0} まで加速するのに要する時間の尺度

乱れを受けたときに、その乱れに追従する、つまり流体に対し、相対的に静水中の沈降速度で運動するようになるまでの時間の指標

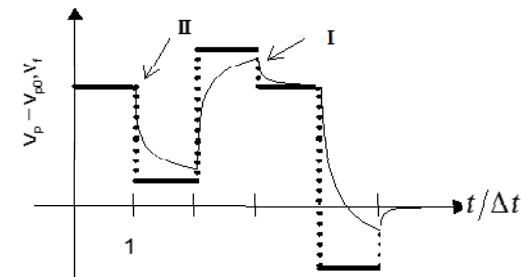
粒子の流体の乱れへの追従性をあらわすパラメータ

$$\frac{\lambda g \Delta t}{v_{p0}} \gg 1$$



(a) 追従が十分な場合

$$\frac{\lambda g \Delta t}{v_{p0}} \ll 1$$



(b) 追従が悪い場合

—— 粒子 —— 流体

流体の乱れに対する粒子の応答

※ 例えば I における速度は II における速度の影響を受けている。

5. 浮遊砂の運動を拡散係数一定値として扱うためには？

必要条件

浮遊砂粒子の運動の時間スケール T_{sl} $\gg$ 浮遊砂の乱れの積分時間スケール T_p

浮遊砂の運動の時間スケール $T_{sl} \approx h/w_0$

$$h/w_0 \gg T_p \quad \text{or} \quad h/w_0 T_p \gg 1$$

$$\frac{h}{w_0 T_p} = \frac{h}{w_0 T_p} \times \frac{u_* T_{fl}}{u_* T_{fl}} = \underbrace{\frac{h}{T_{fl} u_*}}_{\textcircled{1}} \underbrace{\frac{u_*}{w_0}}_{\textcircled{2}} \underbrace{\frac{T_{fl}}{T_p}}_{\textcircled{3}}$$

$$\textcircled{1} \quad T_{fl} \approx h/u_* \longrightarrow h/u_* T_{fl} \approx 1$$

$$\textcircled{2} \quad 1 \lesssim u_*/w_0 \lesssim 10$$

$$\textcircled{3} \quad T_{fl}/T_p \lesssim 1 \quad (\text{条件によっては } T_{fl}/T_p \ll 1)$$

$$h/w_0 T_p \lesssim 10$$

条件を満たさない

浮遊砂の運動を拡散として扱う場合、追跡時間に応じた(運動の履歴に応じた)拡散係数の変化を考慮しなくてはならない。

$$K_p(t) < K_{pTerm} \approx K_{fTerm} \quad (t < T_p)$$

条件によっては、 $K_p(t) \approx 0$ と見なせる場合も...

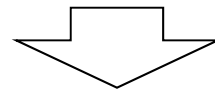
従来の考え

浮遊砂＝流体の乱れの影響を強く受けたランダム運動

——→ 拡散現象(確率論的な運動)としての取り扱い

掃流砂＝初期条件(境界条件)の影響が支配的な運動

——→ 決定論的な運動としての取り扱い



浮遊砂の運動に対しても、境界条件の及ぼす影響は無視できず。場合によっては、乱れによる拡散の影響が小さく、その一連の運動が、境界条件のみで決まってしまう場合もありうる。