in 東京
2012年12月4日

有限要素法の「常識」〔固体・構造編〕

10:10 ～ 11:50（100分）

茨城大学　車谷麻緒
東北大学　寺田賢二郎

第2話 メッシュや要素で答えが変わる

2.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

1.1.1 様々なメッシュパターンや要素種類を使って得られる解の比較

1.1.2 要素あるいはメッシュによる精度の変化

1.1.3 メッシュ細分化のみでは精度を制御できない例～非圧縮性～

2.2 有限要素解析におけるメッシュの細分化の応用

1.2.1 部分的なメッシュ細分化による精度向上

1.2.2 メッシュ細分化の落とし穴

2.3 まとめ

執筆担当：寺田（東北大）・車谷（茨城大）

第3話 要素のからくり(第3話)

3.1 関数近似～簡単な関数の重ね合わせで表現～

3.1.1 多項式の次数を増やす

3.1.2 線形分布の小領域を増やす

3.2 要素内の関数近似

3.2.1 要素の変形モード

3.2.2 変形問題における要素の表現能力

3.2.3 自由度を増やさずに高次化する:非適合モードの追加

3.3 要素形状の“ゆがみ”と近似精度

3.3.1 アイソパラメトリック要素の必要性

3.3.2 近似解における要素形状の“ゆがみ”の影響

3.4 まとめ

執筆担当:富山(琉球大)・寺田(東北大)

第4話 ロッキングとその逃れ方

4.1 ロッキング現象とその発生メカニズム

4.1.1 弾性体の変形と要素剛性方程式

4.1.2 せん断ロッキングのメカニズム

4.1.3 体積ロッキングのメカニズム

4.2 ロッキングからの逃れ方

4.2.1 要素内部自由度を用いたロッキング回避方法

4.2.2 積分操作によるロッキング回避方法

次数低減積分法，選択的次数低減積分法，B-Bar要素

4.3 体積およびせん断ロッキング現象の数値実験

4.4 まとめ

執筆担当：寺田（東北大）・渡邊（物質材料研究機構）・岡澤（広島大）

Contents

目標：固体の有限要素法における近似解の理解

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解　15分（11枚）

メッシュの切り方／メッシュの細かさ／
要素の位相／要素の近似性能

1.2 メッシュの細分化　5分（5枚）

メッシュ細分化による精度向上／
非圧縮性材料に対するFEM／メッシュ細分化の落とし穴

2 要素のしくみ

2.1 FEM解の特徴とその数学的背景　20分（13枚）

弱解／要素の変形性能とひずみエネルギー

2.3 関数近似　30分（22枚）

再現性・完全性／高性能化／要素形状の“ゆがみ”と近似精度

2.4.ロッキングとその回避方法　30分（22枚）

ロッキングの種類／メカニズム／回避方法

Contents

目標：固体の有限要素法における近似解の理解

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解 （～10:25）

メッシュの切り方／メッシュの細かさ／
要素の位相／要素の近似性能

1.2 メッシュの細分化

メッシュ細分化による精度向上／
非圧縮性材料に対するFEM／メッシュ細分化の落とし穴

2 要素のしくみ

2.1 FEM解の特徴とその数学的背景

弱解／要素の変形性能とひずみエネルギー

2.3 関数近似

再現性・完全性／高性能化／要素形状の“ゆがみ”と近似精度

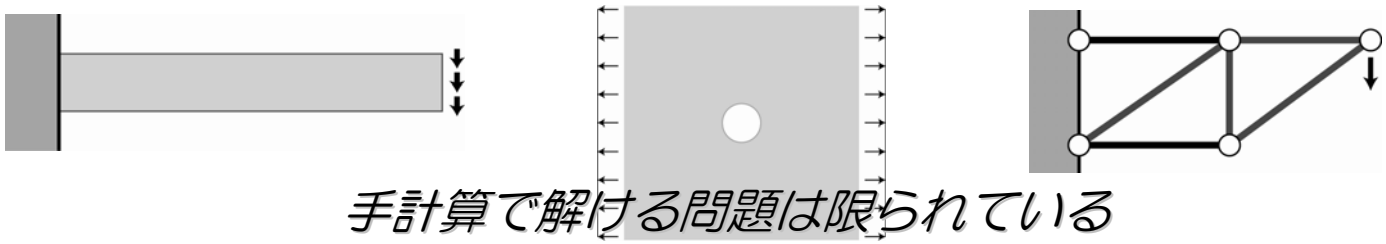
2.4.ロッキングとその回避方法

ロッキングの種類／メカニズム／回避方法

なぜ有限要素法か（FEMが便利な理由）

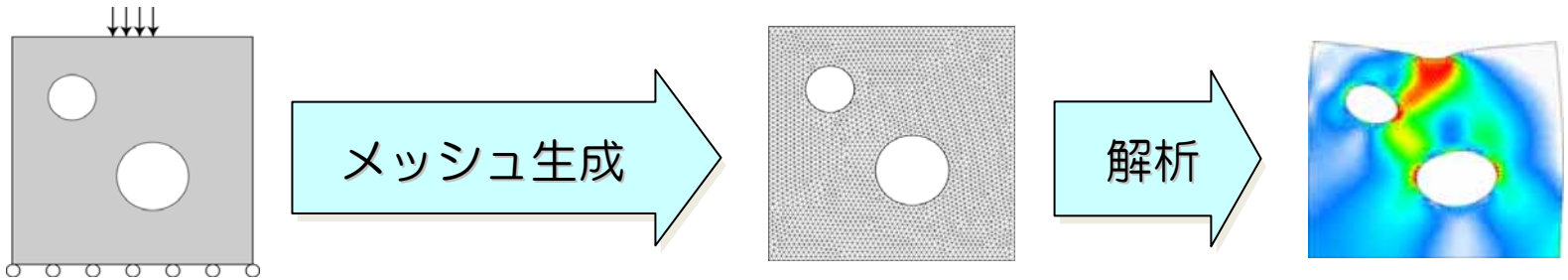
なぜ，有限要素法を使って構造解析を行うのか？？

FDMと比較して，任意形状が解析できる・・・
BEMと比較して，非線形解析がやりやすい・・・
実験しなくてよい・・・



手計算で解ける問題は限られている

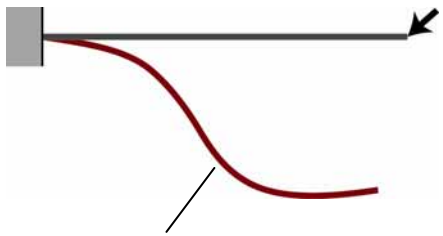
ひとつの答え：メッシュさえ切れれば，何らかの近似解が得られる．



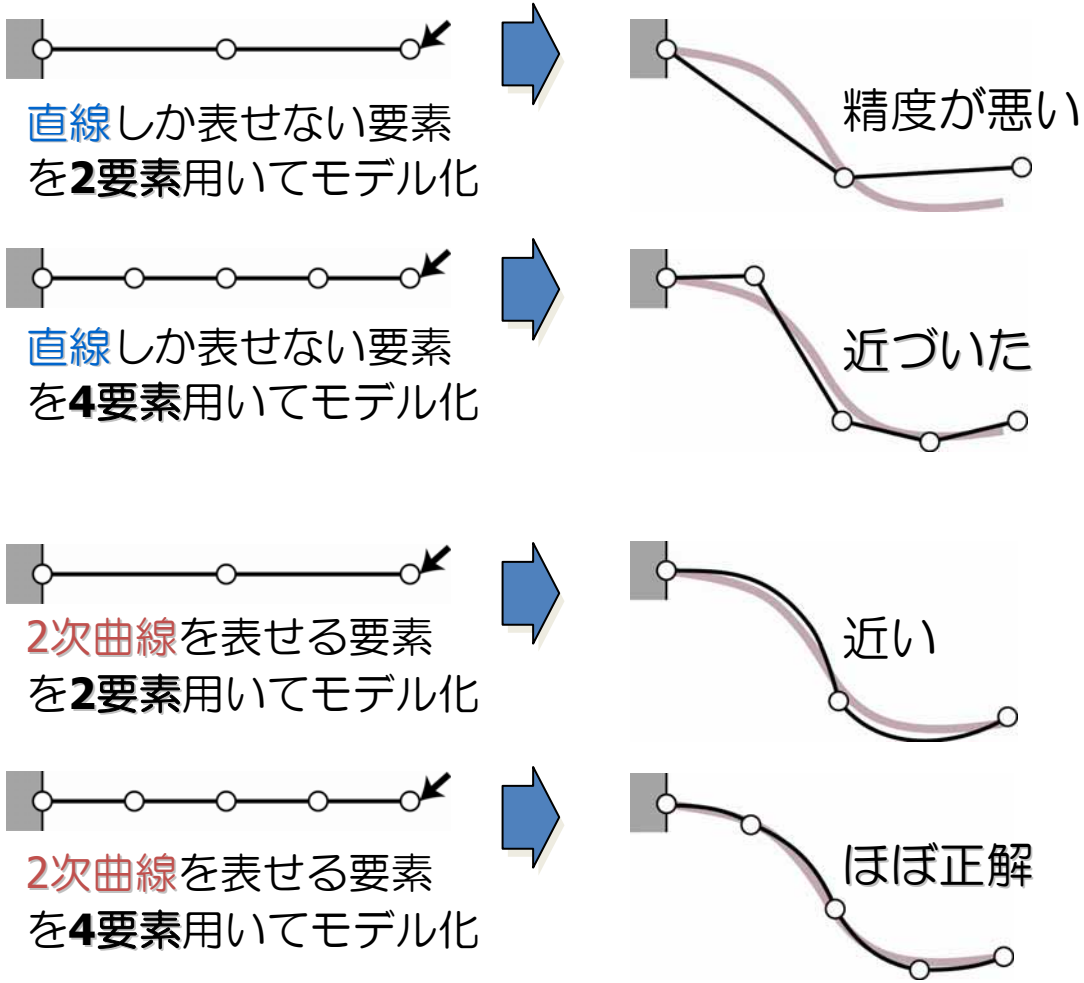
上のような問題は簡単には解けない．
しかし，FEMを使えば（メッシュを切れば），何らかの解が得られる．

なぜ有限要素法か（FEMを簡単に図解すると）

FEMのイメージ



正解の変形
だとすると

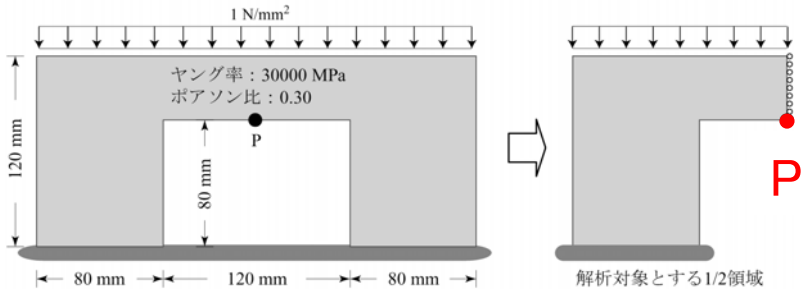


*FEMは正解を導く方法ではなく，**要素の選択とメッシュの作り方**によって，*
正解をかなりの精度で近似することができる方法である．

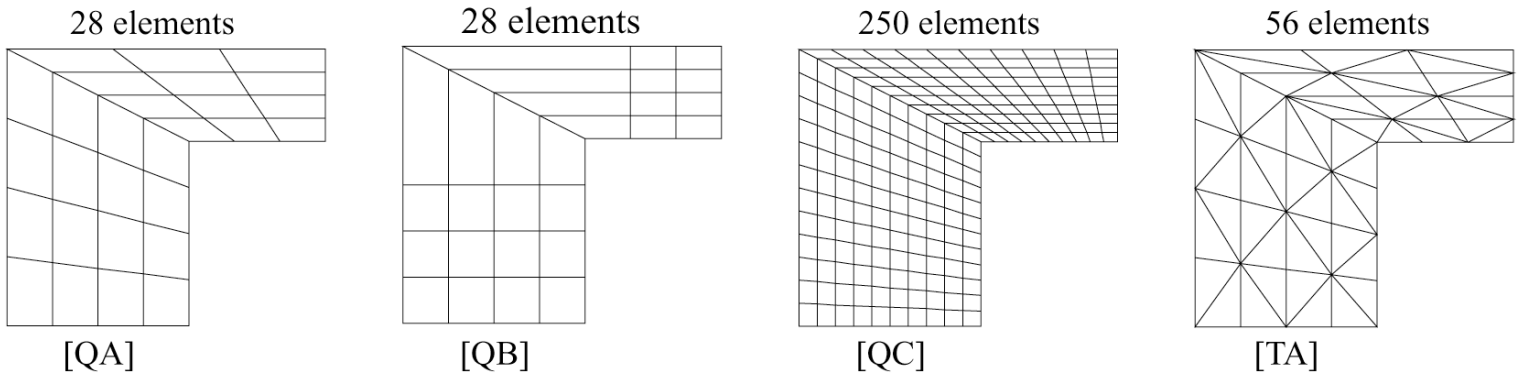
1. メッシュや要素で答えが変わる

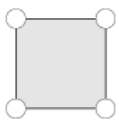
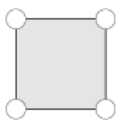
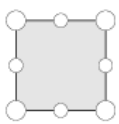
1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

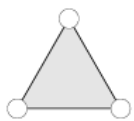
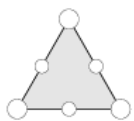
1.1.1 様々なメッシュパターンや要素種類を使って得られる解の比較



変位法に基づく有限要素解（理論的考察）
「P点の変位の値が大きいほど精度が高い」



<QL>		4節点，線形，完全積分
<QI> 高性能要素		4節点，線形，非適合
<QH>		8節点，2次，完全積分

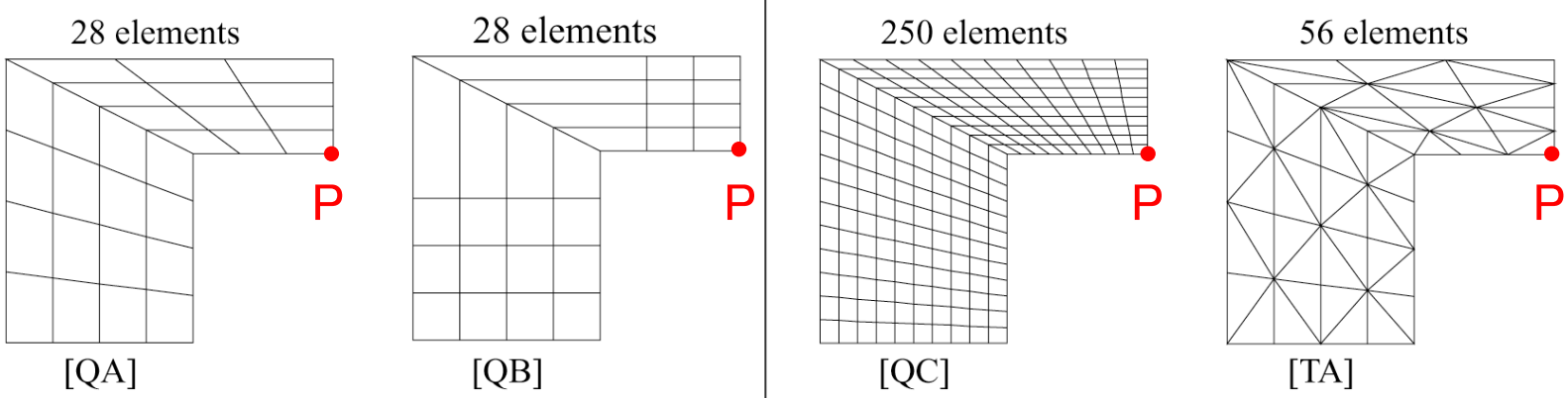
<TL>		3節点，線形
<TH>		6節点，2次

注意：2次の要素QHとTHを用いると
メッシュ全体の節点数は増加します

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

1.1.1 様々なメッシュパターンや要素種類を使って得られる解の比較



4節点，線形
完全積分

0.01589　　0.01594　　0.0211

要素の数・形状によって答えが変わる

4節点，線形
高性能要素

0.0188

要素の形状・種類によって
答えが変わる

要素の種類によって答えが変わる

3節点，線形

6節点，2次

0.0150

0.0223

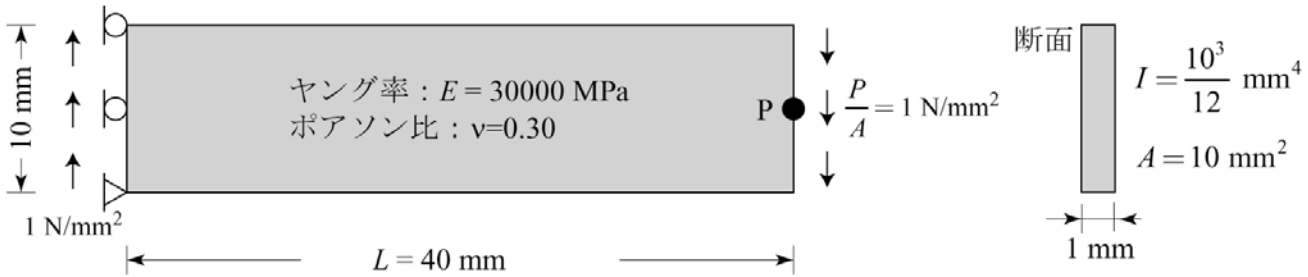
理論「P点の変位の値が大きいほど精度が高い」

1. メッシュや要素で答えが変わる

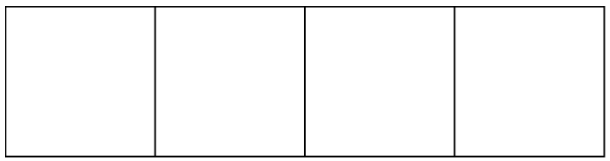
1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

1.1.2 要素あるいはメッシュによる精度の変化

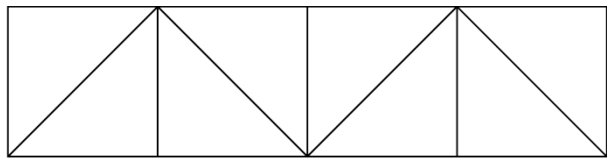
平面応力下の梁のせん断曲げ問題



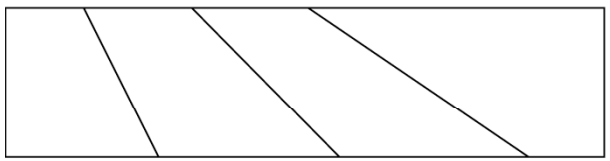
$$v_P^{REF} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA} = 0.0895 \ \text{(mm)}$$



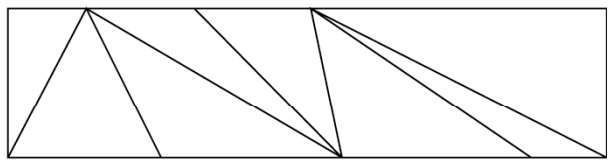
[Q1]



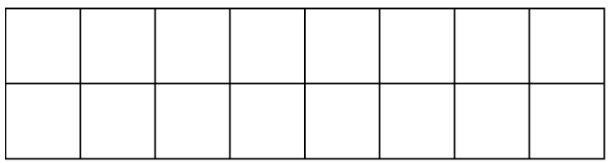
[T1]



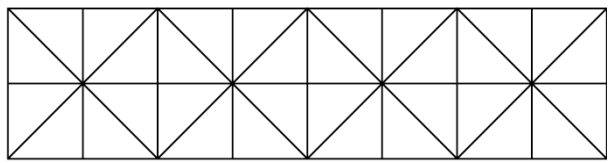
[Q2]



[T2]



[Q3]



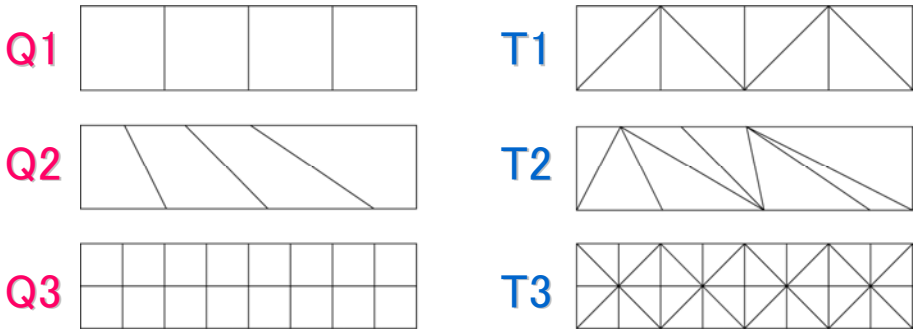
[T3]

- 三角形・四角形
- 線形・高次
- 高性能（非適合）

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

1.1.2 要素あるいはメッシュによる精度の変化



$$v_{\mathrm{P}}^{\mathrm{REF}} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA} = 0.0895 \quad (\mathrm{mm})$$

$$\mathrm{ERROR} = \frac{|v_{\mathrm{P}}^{\mathrm{FEM}}| - |v_{\mathrm{P}}^{\mathrm{REF}}|}{|v_{\mathrm{P}}^{\mathrm{REF}}|} \times 100 \quad (\%)$$

メッシュ	要素	誤差(%)
Q1	線形	32.90
Q1	高性能	2.27
Q1	高次（2次）	1.34
Q2	線形	54.60
Q2	高性能	2.70
Q2	高次（2次）	3.26
Q3	線形	11.70
Q3	高性能	1.51
Q3	高次（2次）	0.74

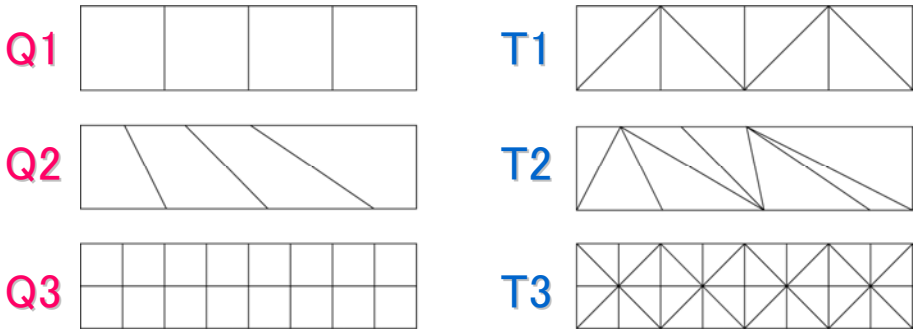
メッシュ	要素	誤差(%)
T1	線形	68.30
T1	高次（2次）	1.82
T2	線形	74.60
T2	高次（2次）	4.04
T3	線形	36.90
T3	高次（2次）	0.74

低次要素において，「要素のゆがみ」の問題は深刻

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

1.1.3 メッシュの細分化のみでは精度を制御できないケース～非圧縮性材料～



平面ひずみ下の梁のせん断曲げ問題

$E = 30000 \ \ (\mathrm{MPa})$

$\nu = 0.499$ ←擬似非圧縮性

$v_{\mathrm{P}}^{\mathrm{REF}} = 0.0675 \ \ (\mathrm{mm})$

メッシュ	要素	誤差(%)
Q1	線形	94.00
Q1	高次（2次）	0.72
Q2	線形	91.90
Q2	高次（2次）	53.30
Q3	線形	93.80
Q3	高次（2次）	0.53

メッシュ	要素	誤差(%)
T1	線形	62.70
T1	高次（2次）	2.12
T2	線形	76.50
T2	高次（2次）	6.06
T3	線形	31.70
T3	高次（2次）	0.11

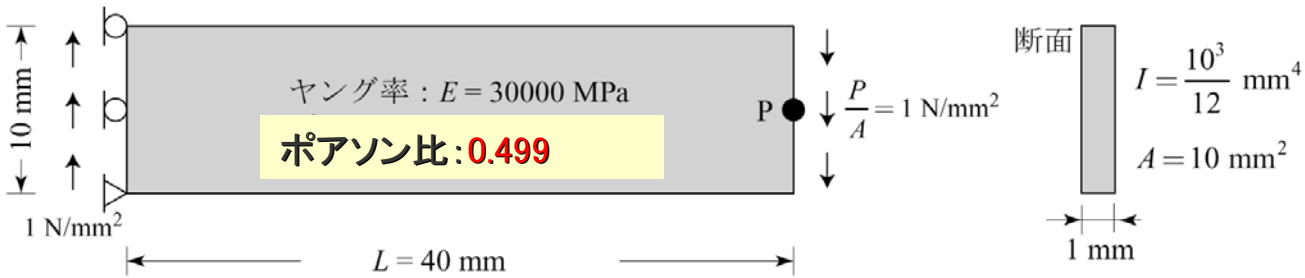
非圧縮性材料：精度を高めるには？

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

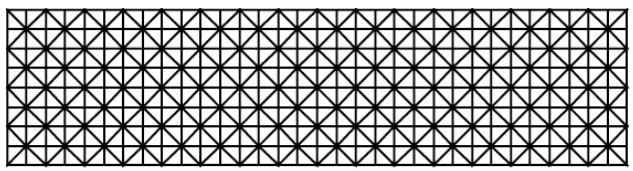
1.1.3 メッシュの細分化のみでは精度を制御できないケース～非圧縮性材料～

検討：平面ひずみ擬似非圧縮性の例題
～ メッシュ細分化で精度向上を図れるか？～

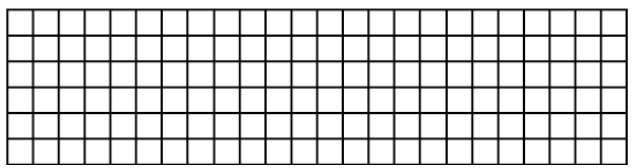


規則的なメッシュ

T4

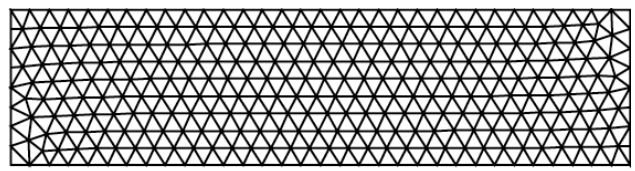


Q4

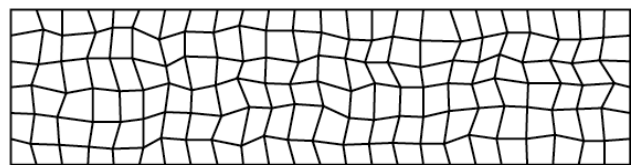


ランダムなメッシュ

T5



Q5

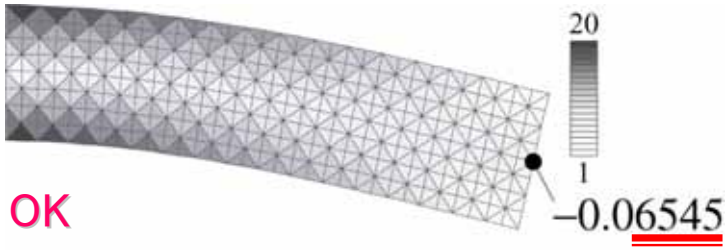


1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

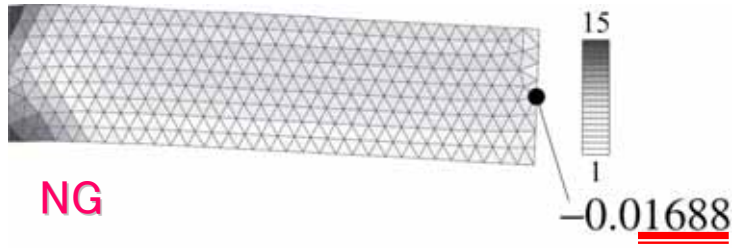
1.1.3 メッシュの細分化のみでは精度を制御できないケース～非圧縮性材料～

三角形
整合
＋
線形



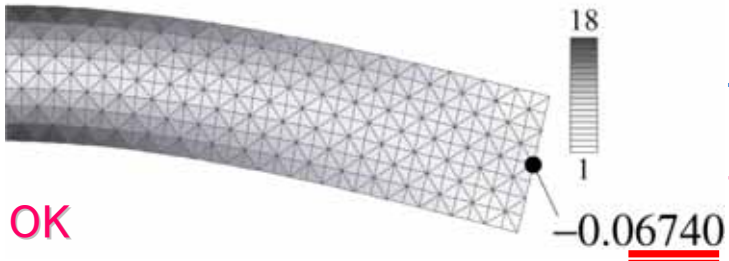
OK

三角形
ランダム
＋
線形



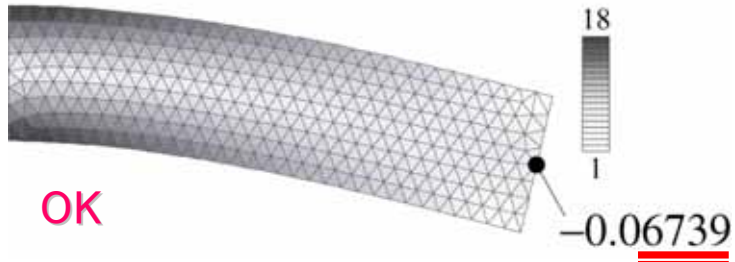
NG

三角形
整合
＋
高次



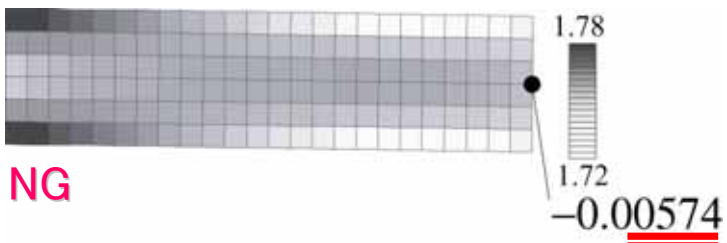
OK

三角形
ランダム
＋
高次



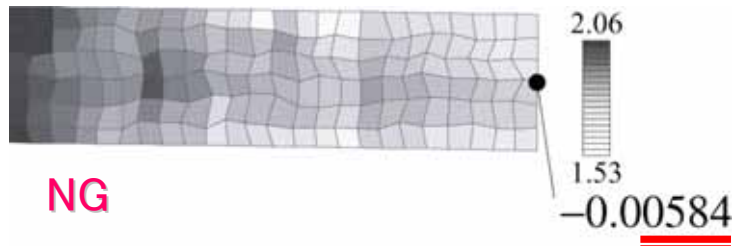
OK

四角形
整合
＋
線形



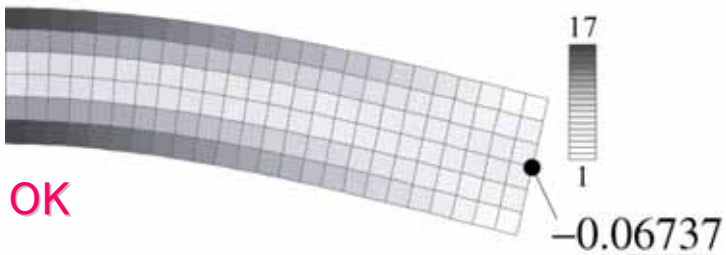
NG

四角形
ランダム
＋
線形



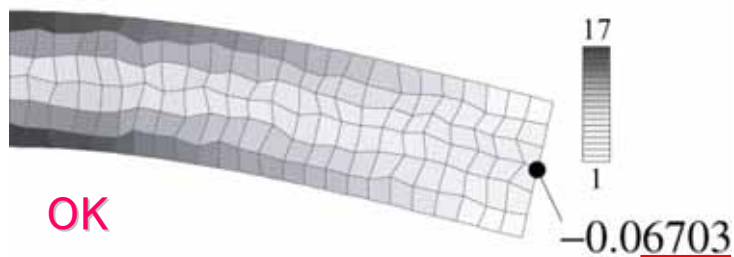
NG

四角形
整合
＋
高次



OK

四角形
ランダム
＋
高次



OK

Contents

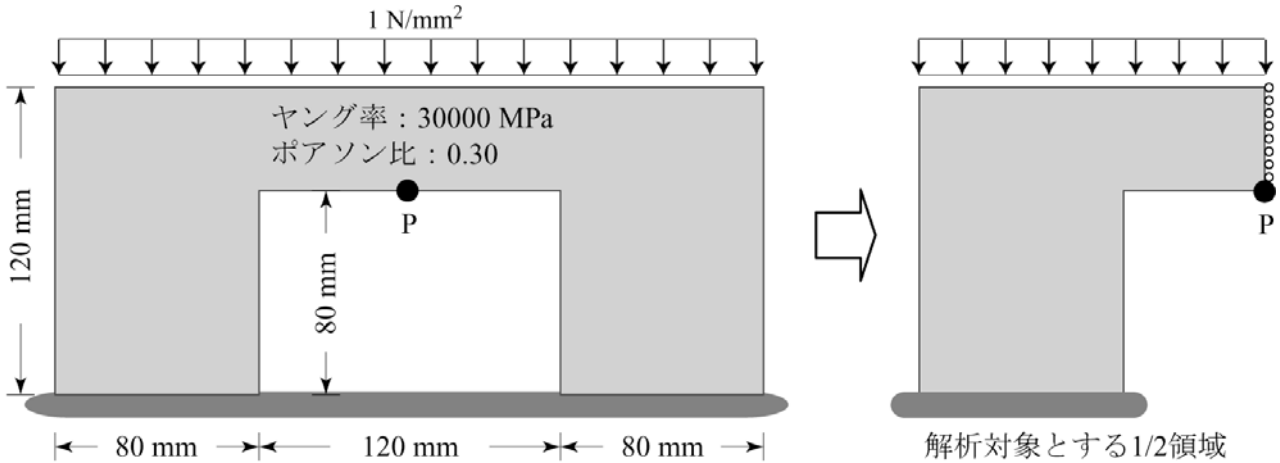
目標：固体の有限要素法における近似解の理解

1. メッシュや要素で答えが変わる
    - 1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解
        - メッシュの切り方／メッシュの細かさ／
        - 要素の位相／要素の近似性能
    - 1.2 メッシュの細分化 （10:25～10:30）
        - メッシュ細分化による精度向上／
        - 非圧縮性材料に対するFEM／メッシュ細分化の落とし穴
2. 要素のしくみ
    - 2.1 FEM解の特徴とその数学的背景
        - 弱解／要素の変形性能とひずみエネルギー
    - 2.3 関数近似
        - 再現性・完全性／高性能化／要素形状の“ゆがみ”と近似精度
    - 2.4.ロッキングとその回避方法
        - ロッキングの種類／メカニズム／回避方法

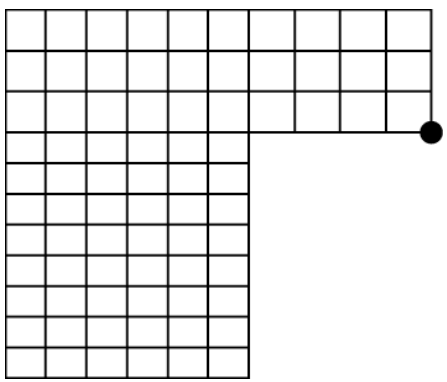
1. メッシュや要素で答えが変わる

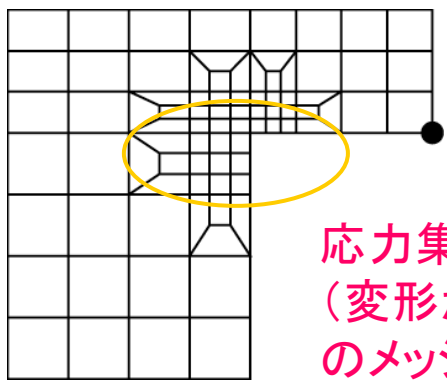
1.2 有限要素解析におけるメッシュの細分化の応用

1.2.1 部分的なメッシュ細分化による精度向上



節点数・要素数は両者ともに同じ



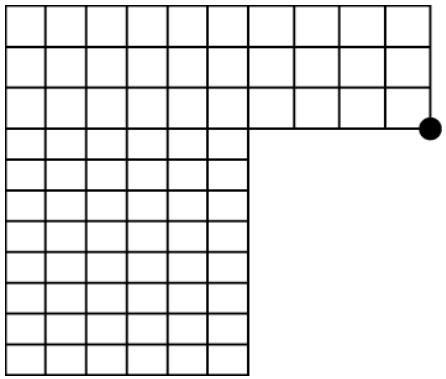


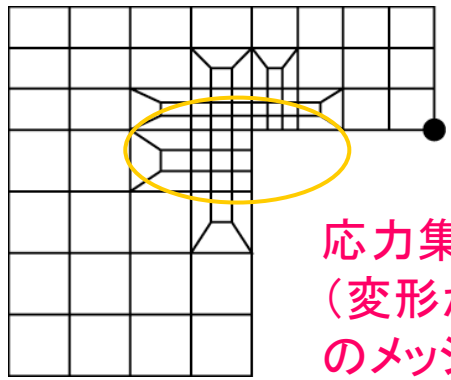
応力集中部
（変形が大きい）
のメッシュを細分化

1. メッシュや要素で答えが変わる

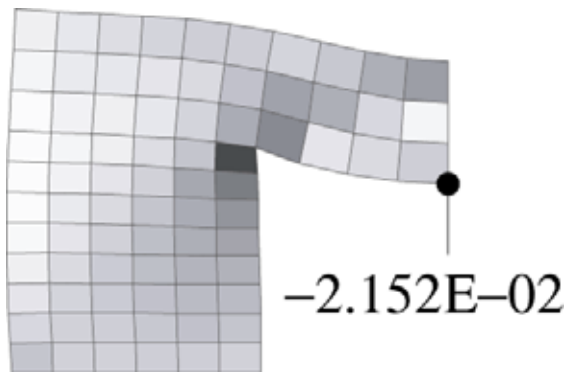
1.2 有限要素解析におけるメッシュの細分化の応用

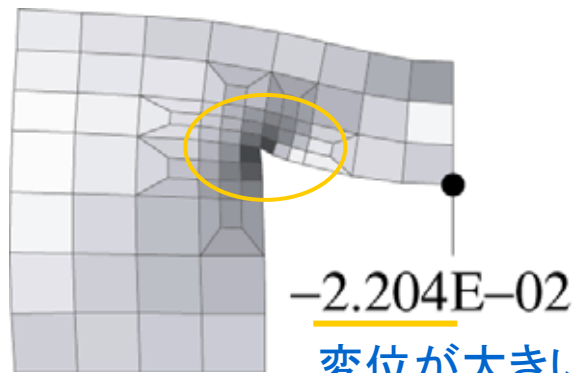
1.2.1 部分的なメッシュ細分化による精度向上





応力集中部
（変形が大きい）
のメッシュを細分化





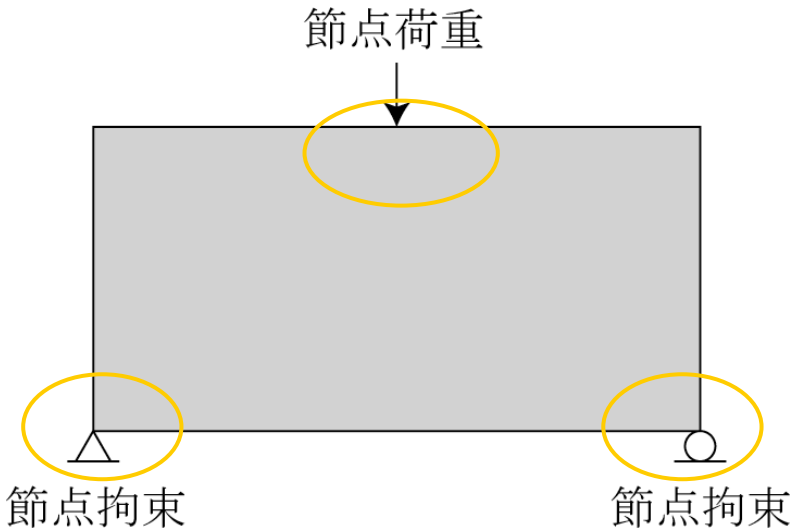
変位が大きい
すなわち精度が高い

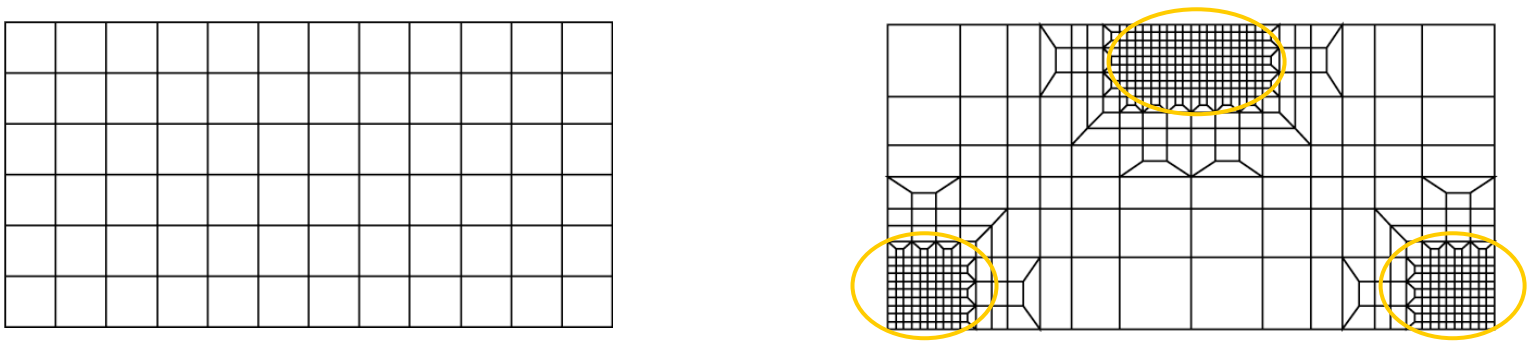
1. メッシュや要素で答えが変わる

1.2 有限要素解析におけるメッシュの細分化の応用

1.2.1 メッシュ細分化の落とし穴

どの部分の精度を
高くしたい？

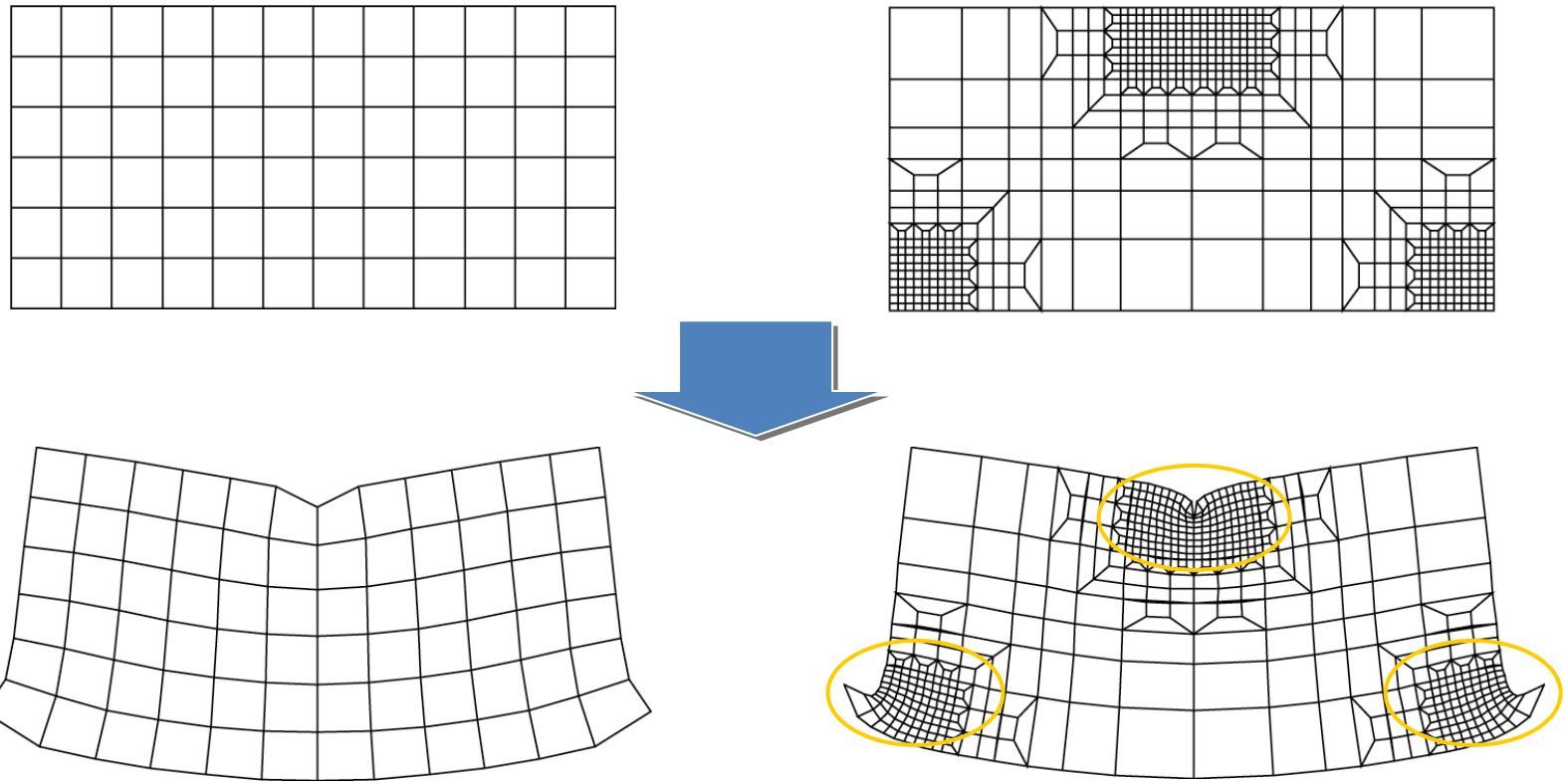




1. メッシュや要素で答えが変わる

1.2 有限要素解析におけるメッシュの細分化の応用

1.2.1 メッシュ細分化の落とし穴



- メッシュ細分化によって，誤った結果を示している
- 有限要素法の基礎式を与える固体力学は空間的な広がりを持った領域・境界を対象としているすなわち，1点での載荷や支持は許容されない
- 右の結果は，メッシュ細分化により，誤りを誇張しただけ

メッシュ細分化のパラドックス（BabuskaのParadox）

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.3 まとめ

- *FEMの近似解が変化する要因*
  - メッシュの切り方：要素形状（正方形からの変動＝ゆがみ）
  - メッシュの細かさ：要素分割数（要素数，節点数）
  - 要素の位相：三角形，四角形など
  - 要素の近似性能：要素内での関数の表現方法
    線形・高次／非適合／（混合補間）
- 「要素」と「メッシュ」の違いによって得られる答え（近似解）は大きく異なりうる
  - FEMによる解析の精度を左右する因子
    - 要素分割数を増やす（要素数を増やす＝メッシュを細かくする）
    - 要素の位相を変更する（三角形要素から四角形要素に変更する）
    - 要素性能を高めるI：高次要素（2次以上の要素）を使用する
    - 要素性能を高めるII：高性能要素（例えば非適合要素）を使用する
  - 例外：非圧縮性材料
  - メッシュ細分化による精度向上を図る際
    - 点載荷・点支持には注意が必要

Contents

目標：固体の有限要素法における近似解の理解

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解

メッシュの切り方／メッシュの細かさ／
要素の位相／要素の近似性能

1.2 メッシュの細分化

メッシュ細分化による精度向上／
非圧縮性材料に対するFEM／メッシュ細分化の落とし穴

2 要素のしくみ

2.1 FEM解の特徴とその数学的背景 （10:30～10:50）

弱解／要素の変形性能とひずみエネルギー

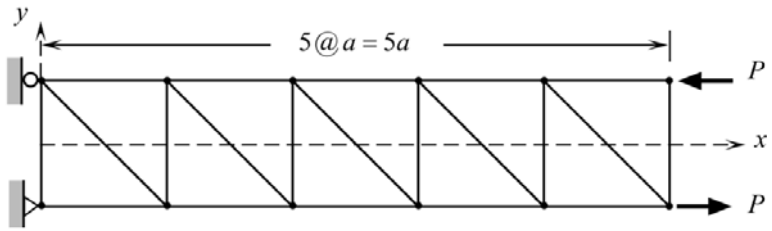
2.3 関数近似

再現性・完全性／高性能化／要素形状の“ゆがみ”と近似精度

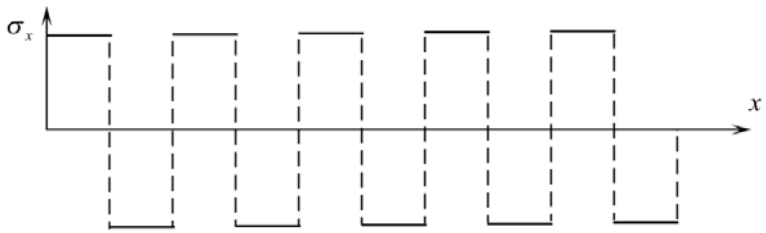
2.4.ロッキングとその回避方法

ロッキングの種類／メカニズム／回避方法

有限要素法による近似解
～イントロダクション：弱解の特徴～

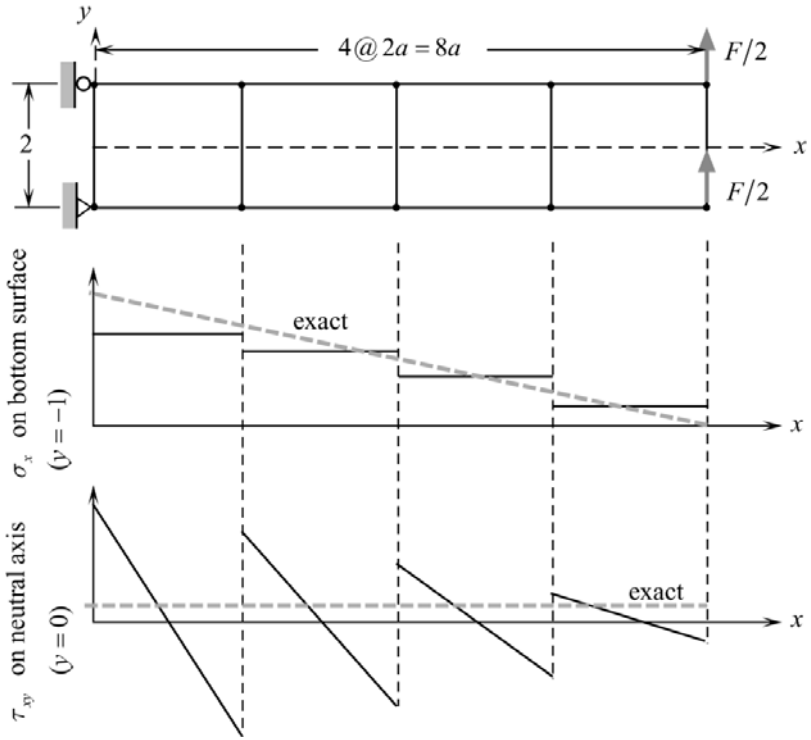


(a) はり状構造物の純曲げモデル



(b) x軸上のx方向垂直応力

定ひずみ三角形要素（CST）

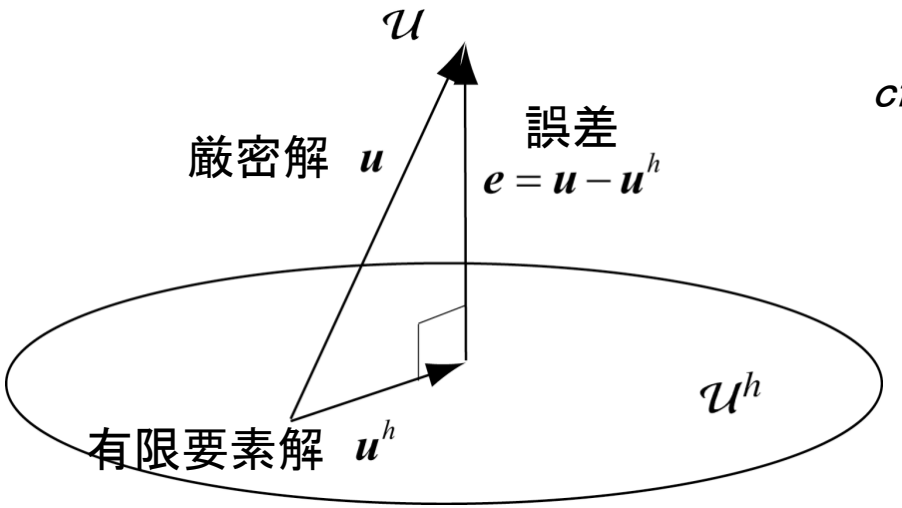


4節点アイソパラメトリック四辺形要素（QUAD4）

$$\int_{\Omega} (\partial \delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\, \partial \boldsymbol{u} dV - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{b}}\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{t}}\, dS = 0$$

- 弱形式（仮想仕事式）に基づく定式化：弱解
- 積分量のつり合い（弱形式）≒ 各点ごとのつり合い（強形式）
- 有限要素方程式：エネルギーを介して平均的に成り立つ

有限要素近似の数学的図解



cf. $a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) := \int_\Omega (\partial \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\, \partial \boldsymbol{u} dv$

・厳密解，有限要素解，誤差は直角三角形で表される．

$$a(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}) = a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - a(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}^h) \qquad \left(\Leftarrow \quad a(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{e}) = 0\right)$$

・Galerkin法に基づく有限要素近似は，最良近似となる．

$$a(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}) \le a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}^h,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}^h)$$

・ $a(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}) \ge 0$ より， $a(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}^h) \le a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$

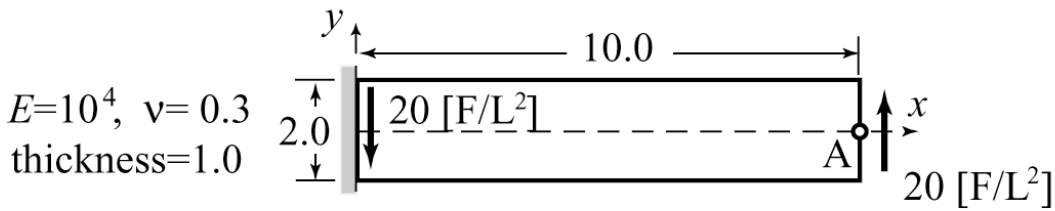
すなわち，変位法に基づく（Galerkin）有限要素解は，
常にひずみエネルギーを過小評価している．

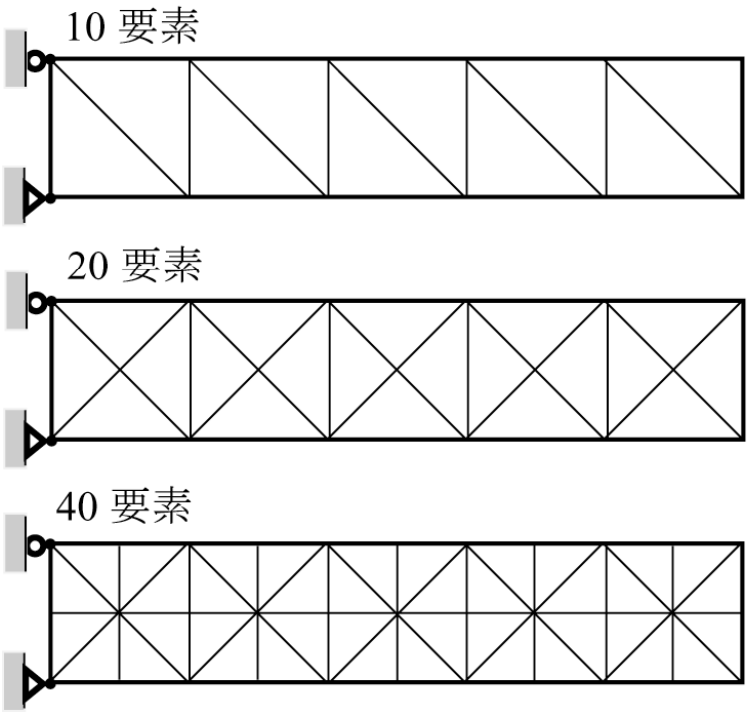
人為的な操作を
加えない限り

換言すれば，弾性問題における有限要素解は常に正解によりも剛な解を与える．

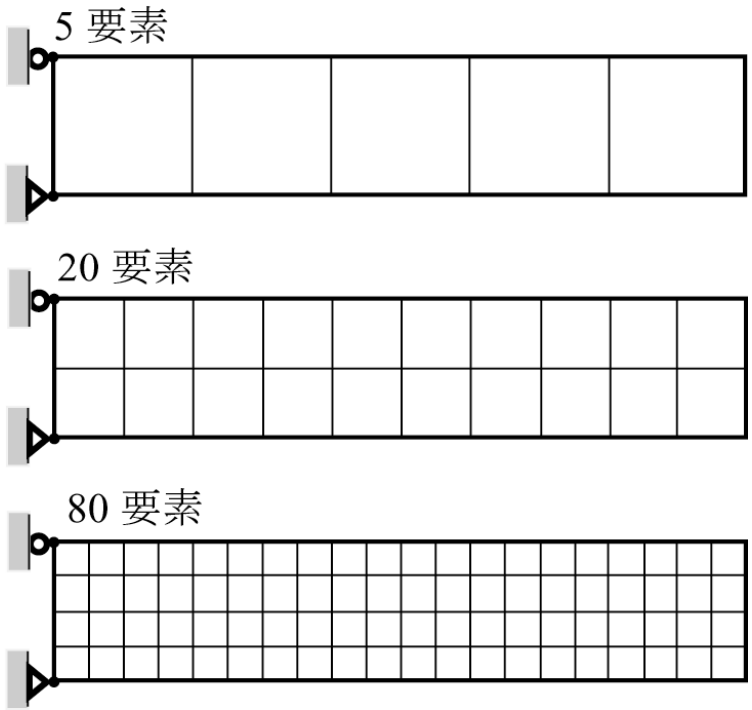
有限要素法による近似解

～典型的なFEM解～





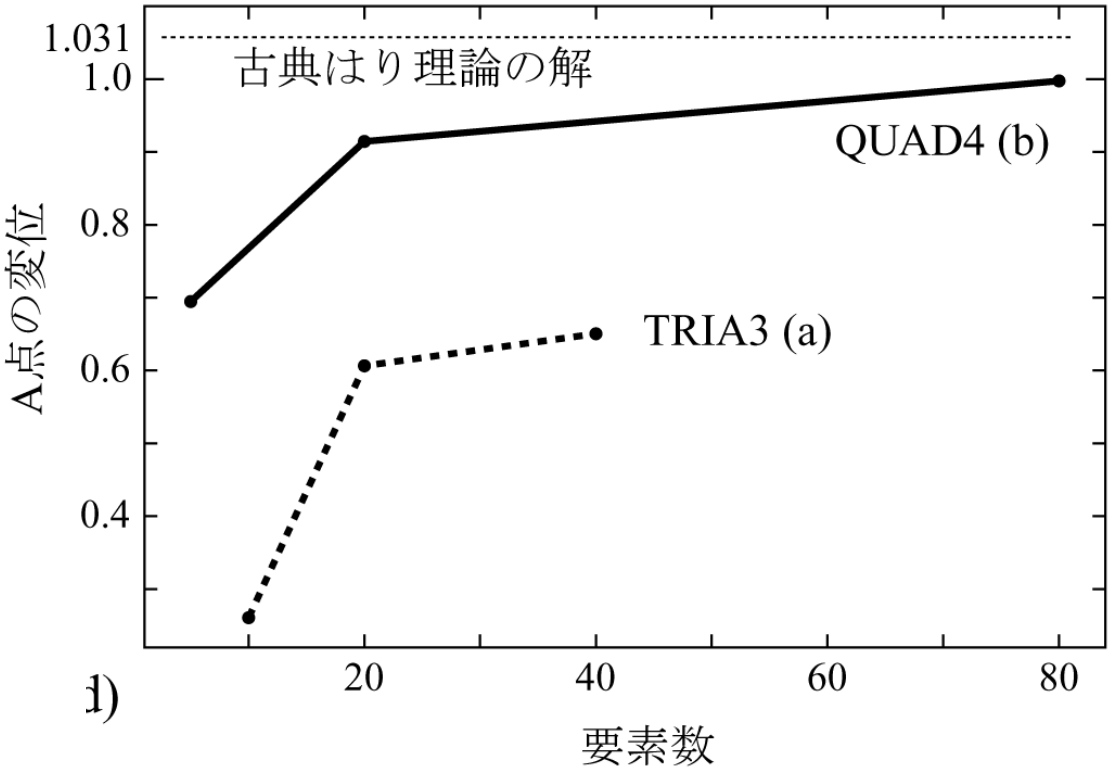
3節点三角形要素（TRIA3）



4節点四角形要素（QUAD4）

有限要素法による近似解

～典型的なFEM解～



- 要素数（自由度数）を増せば正解に近づく.
- （変位法に基づく）有限要素解は常に正解より剛な解を与える.

$$a(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{u}^h) \leq a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$$

有限要素法による近似

Q. なぜ，三角形要素より四角形要素の方が精度が良いか？

A. 四角形要素の方が，**自由度**の数が多いから
四角形要素の方が，**基底関数**の数が多いから

この項の分だけ高精度となる

定ひずみ三角形要素

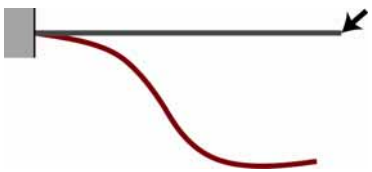
$1, x, y$ の**3**つの基底を使って変位を近似

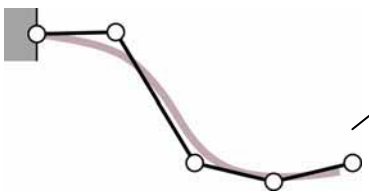
$$u^h(x,y) = a + bx + cy$$

双一次四角形要素

$1, x, y, xy$ の**4**つの基底を使って変位を近似

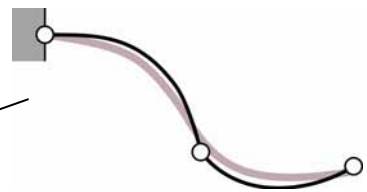
$$u^h(x,y) = a + bx + cy + dxy$$





有限要素近似 ＝ 関数近似

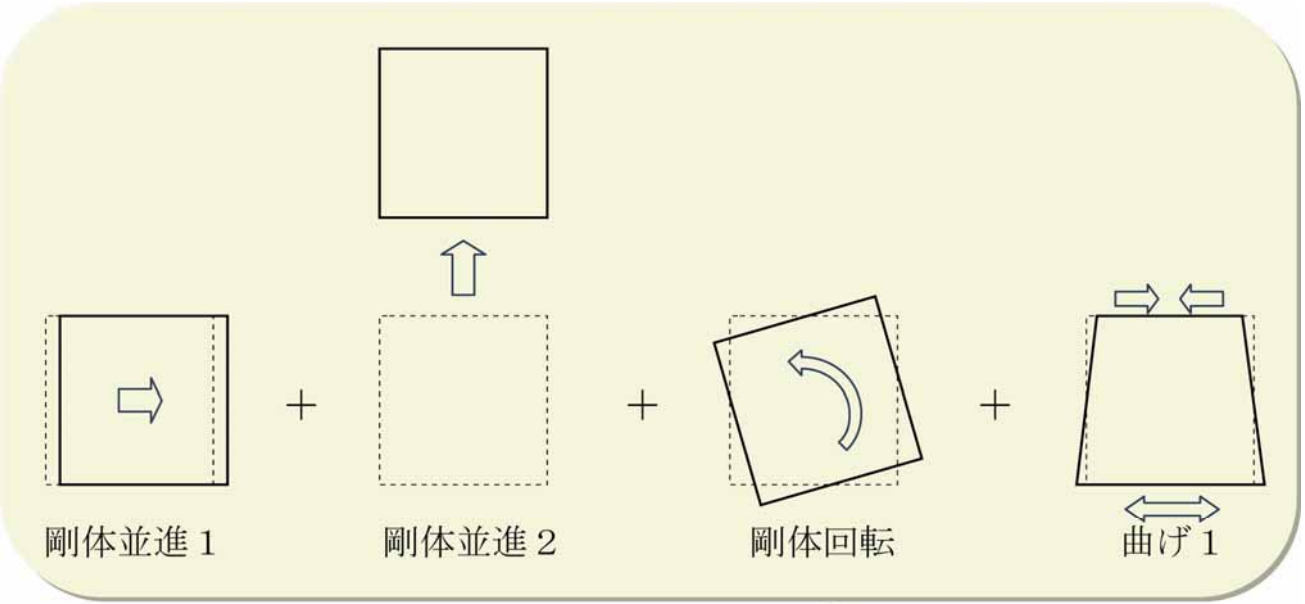
精度を上げるには，
1. 基底関数を増やす → 高次化
2. 近似領域を区分化する → メッシュ細分化

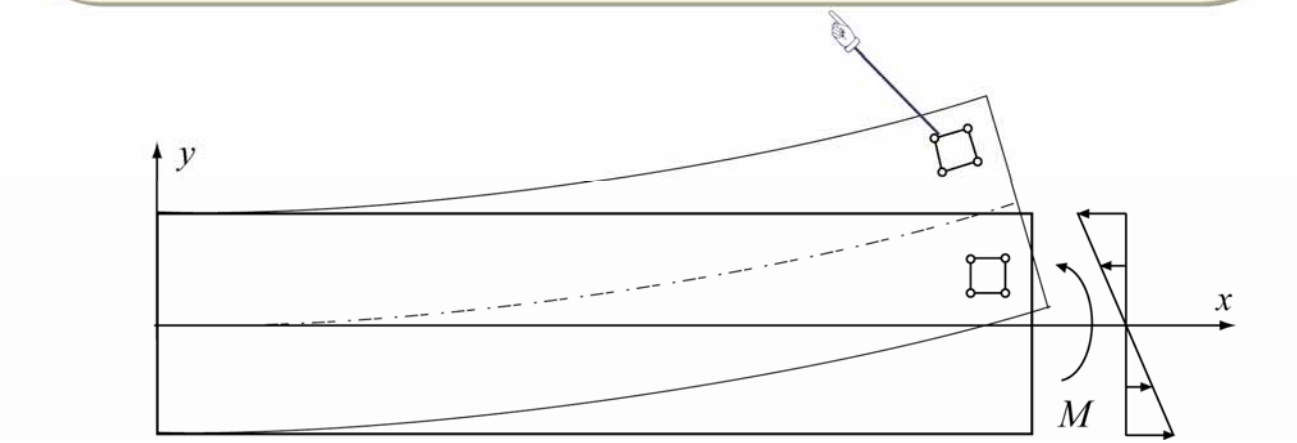


有限要素法による近似解

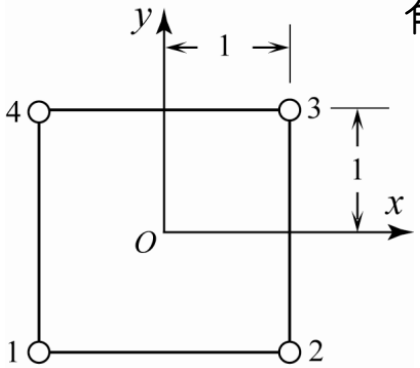
～変形の表現～

要素の変形＝基本変形モードの重ね合わせ





4節点四辺形要素（双一次四辺形要素，QUAD4）

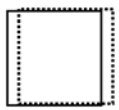
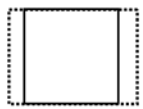
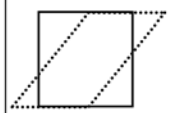
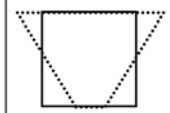
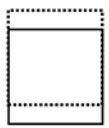
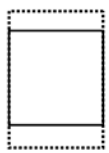
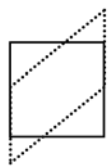
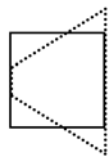


有限要素近似の特徴を分析してみよう．（後でも使う）

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &\approx \hat{u}(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v(x,y) &\approx \hat{v}(x,y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy \end{aligned}\right\}$$

基本変形モード

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}(x_1,y_1) &:= u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 + a_4 x_1 y_1 \\ \hat{u}(x_2,y_2) &:= u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 + a_4 x_2 y_2 \\ \hat{u}(x_3,y_3) &:= u_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 + a_4 x_3 y_3 \\ \hat{u}(x_4,y_4) &:= u_4 = a_1 + a_2 x_4 + a_3 y_4 + a_4 x_4 y_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

	剛体移動		1軸引張		せん断		曲げ	
x 軸方向基本変形モード $\{u_1\ u_2\ u_3\ u_4\}$ (l=1)	$\{1\ 1\ 1\ 1\}$		$\{-1\ 1\ 1\ -1\}$		$\{-1\ -1\ 1\ 1\}$		$\{1\ -1\ 1\ -1\}$	
y 軸方向基本変形モード $\{v_1\ v_2\ v_3\ v_4\}$								

正方形要素の任意の変形 ＝ 移動×a_1＋伸縮×a_2 ＋ずれ×a_3 ＋曲げ×a_4

要素剛性行列の固有値・固有ベクトルの力学的意味

要素剛性行列の固有値 λ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{e}_\lambda$ を考える:

$$\left(\boldsymbol{K}_e - \lambda \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{e}_\lambda = 0$$

両辺と $\boldsymbol{e}_\lambda$ とのスカラー積を取ると

$$\boldsymbol{e}_\lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{e}_\lambda = \lambda \boldsymbol{e}_\lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_\lambda = \lambda$$

また、この固有ベクトルで表される変形によって要素に蓄えられるひずみエネルギーは $U_e(\boldsymbol{e}_\lambda) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_\lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{e}_\lambda$ なので、

要素剛性行列の固有値は，対応する固有ベクトル（モード）で表される変形を与えた際に要素に蓄えられるひずみエネルギーの2倍の量

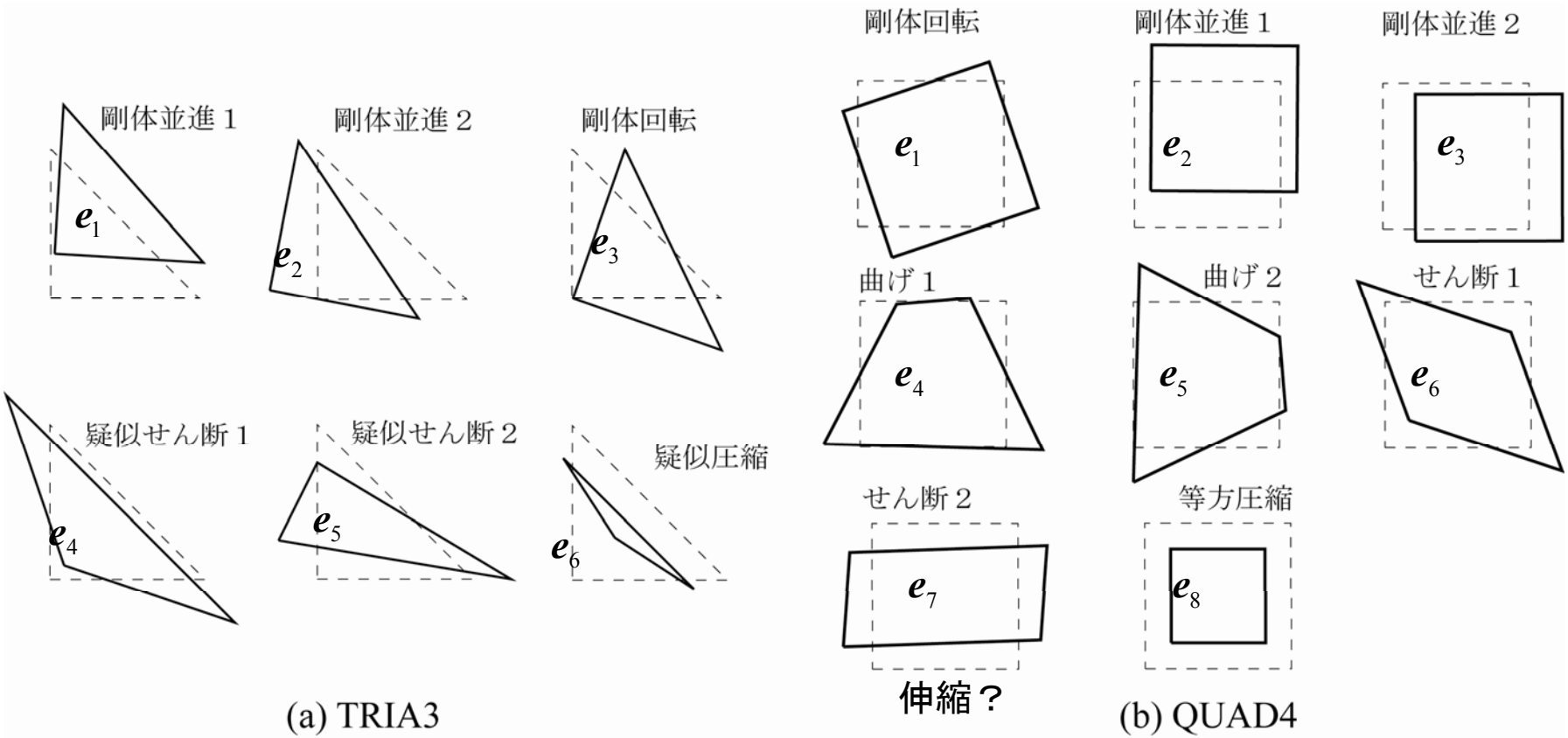
$$\lambda = 2U_e(\boldsymbol{e}_\lambda)$$

$$J_e(\boldsymbol{e}_\lambda) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_\lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{e}_\lambda - \boldsymbol{e}_\lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_e = W_e(\boldsymbol{e}_\lambda) = U_e(\boldsymbol{e}_\lambda) + W_e(\boldsymbol{e}_\lambda)$$

ひずみエネルギー

要素の固有変形モード

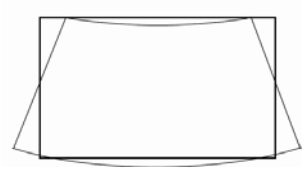
実際に起こる変位 $\boldsymbol{u}^h$ は，固有変形モードの重ね合わせ：

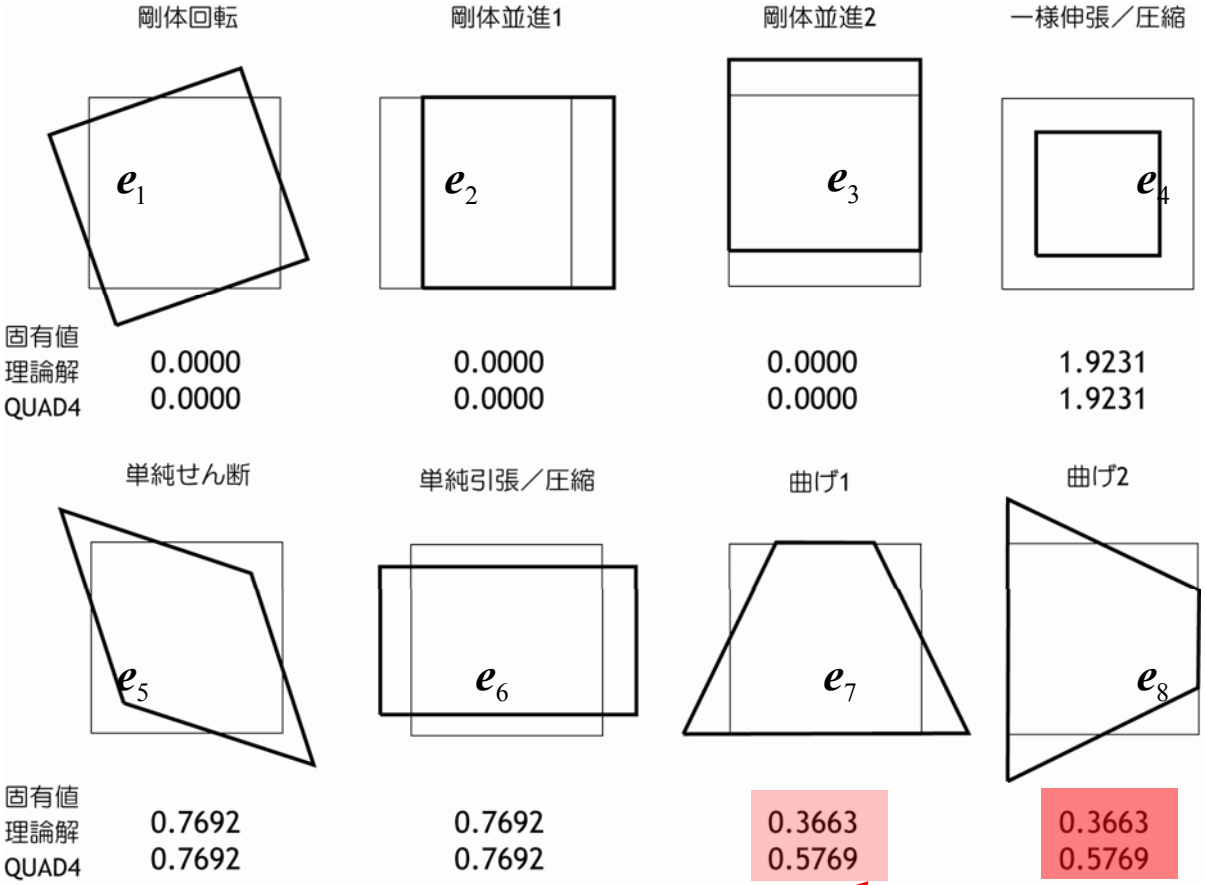


$$\boldsymbol{u}^h(x,y) = w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2 + w_3\boldsymbol{e}_3 + w_4\boldsymbol{e}_4 + w_5\boldsymbol{e}_5 + w_6\boldsymbol{e}_6$$

$$\boldsymbol{u}^h(x,y) = w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2 + w_3\boldsymbol{e}_3 + w_4\boldsymbol{e}_4 + w_5\boldsymbol{e}_5 + w_6\boldsymbol{e}_6 + w_7\boldsymbol{e}_7 + w_8\boldsymbol{e}_8$$

各変形モードに必要なエネルギー
～双一次四辺形要素（正方形）の場合～





$E=1,\ \nu=0.3$

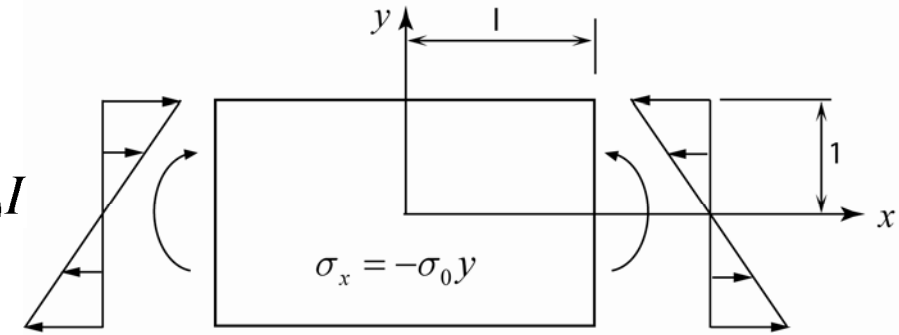
実際に起こる変位 u^h は，固有変形モードの重ね合わせ：

$$\boldsymbol{u}^h(x,y) = w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2 + w_3\boldsymbol{e}_3 + w_4\boldsymbol{e}_4 + w_5\boldsymbol{e}_5 + w_6\boldsymbol{e}_6 + w_7\boldsymbol{e}_7 + w_8\boldsymbol{e}_8$$

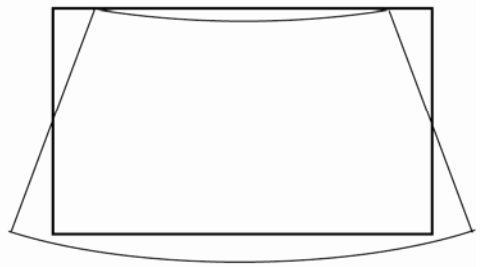
連続体と四辺形要素の曲げ挙動の比較

$$M = -\sigma_0 I$$

$$\sigma_0 = -\frac{M}{I}$$



2次曲線



連続体

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\sigma_0}{D_{11}} xy \\ v = -\dfrac{\sigma_0}{2D_{11}}\left(l^2 - x^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\sigma_0}{D_{11}} y \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\varepsilon \begin{cases} \sigma_x = -\sigma_0 y \\ \sigma_y = -\sigma_0 \dfrac{D_{22}}{D_{11}} y \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

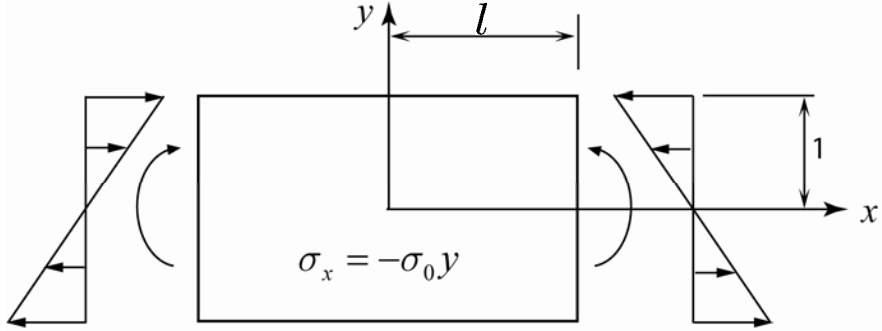
$$D_{11} = E$$

純曲げ時のせん断応力＝0

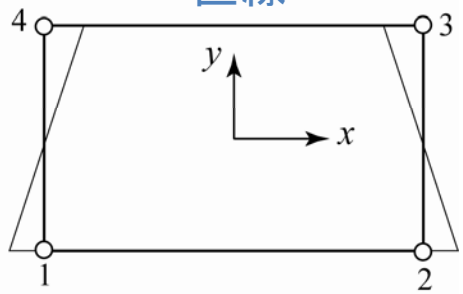
ひずみエネルギー（理論解）:

$$U^{\mathrm{EX}} = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\int_{-1}^{1}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dxdy$$

$$= \int_0^l dx \int_{-1}^{1} \frac{\sigma_0^2}{D_{11}} y^2 dy = \frac{2\sigma_0^2}{3D_{11}} l$$



直線



曲げモードを節点変位で与える:　　有限要素

$$\boldsymbol{d}^e = \left\{ u_1^e \quad v_1^e \quad u_2^e \quad v_2^e \quad u_3^e \quad v_3^e \quad u_4^e \quad v_4^e \right\}^{\mathrm{T}} \Leftarrow \frac{\sigma_0}{D_{11}} \left\{ -l \quad 0 \quad l \quad 0 \quad -l \quad 0 \quad l \quad 0 \right\}^{\mathrm{T}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u}^h = \begin{Bmatrix} u^h \\ v^h \end{Bmatrix} \approx \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{d}_e = \frac{\sigma_0}{D_{11}} \begin{Bmatrix} -xy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}_e \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \times \frac{\sigma_0}{D_{11}} = \frac{\sigma_0}{D_{11}} \begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\varepsilon$$

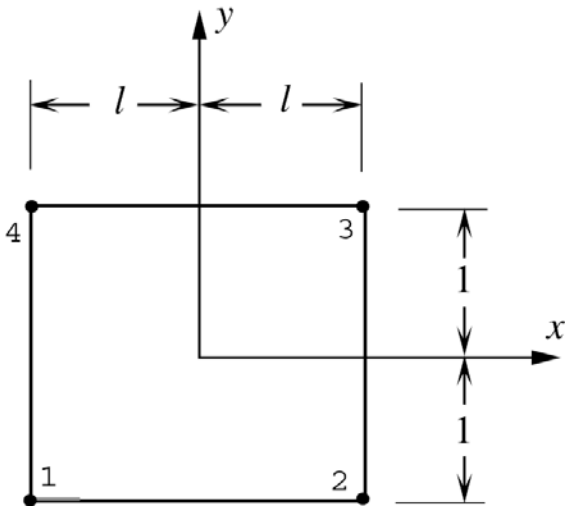
Superiors shear
（“偽りの”せん断）

$$\begin{cases} \sigma_x = -\sigma_0 y \\ \sigma_y = -\dfrac{D_{12}\sigma_0}{D_{11}} y \\ \tau_{xy} = -\dfrac{D_{33}\sigma_0}{D_{11}} x \end{cases}$$

ひずみエネルギー（有限要素解）

$$U^{\mathrm{FE}} = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \int_{-1}^{1} \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right) dxdy$$

$$= \int_0^l dx \int_{-1}^{1} \frac{\sigma_0^2}{D_{11}} y^2 dy + \int_0^l \frac{D_{33}\sigma_0^2}{D_{11}^2} x^2 dx \int_{-1}^{1} dy = \frac{2\sigma_0^2}{3D_{11}} l \left(1 + \frac{D_{33}}{D_{11}} l^2 \right)$$



連続体とQUAD4の四辺形領域の角点が曲げに対応する変位を与えられた際のひずみエネルギーの比：

$$\frac{U^{\mathrm{FE}}}{U^{\mathrm{EX}}}=\frac{\frac{2\sigma_0^2}{3D_{11}}l\left(1+\frac{D_{33}}{D_{11}}l^2\right)}{\frac{2\sigma_0^2}{3D_{11}}l}=1+\frac{D_{33}}{D_{11}}l^2 \qquad \left(=1+\frac{1-\nu}{2}l^2\right)$$

細長いほどエネルギーを過剰評価する
（剛になる; “せん断”ロッキング現象）
「かたい」＝「精度悪し」

Remark: 先の誤差評価では，有限要素解は同じ外荷重に対してひずみエネルギーを過小評価．ここでは同一変形に必要なエネルギーの意味．

- 「曲げ」は構造の問題特有の挙動．四辺形要素に限らず，“曲げ”を精度良く表現（近似）することは難しい．
- 任意の要素形状になるとさらに状況は悪化する．
- ただし，汎用CAEソフトでこの要素をデフォルトで提供しているものは稀

Contents

目標：固体の有限要素法における近似解の理解

1. メッシュや要素で答えが変わる
    - 1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解
        - メッシュの切り方／メッシュの細かさ／
        - 要素の位相／要素の近似性能
    - 1.2 メッシュの細分化
        - メッシュ細分化による精度向上／
        - 非圧縮性材料に対するFEM／メッシュ細分化の落とし穴

2 要素のしくみ

- 2.1 FEM解の特徴とその数学的背景
    - 弱解／要素の変形性能とひずみエネルギー
- 2.3 関数近似 （10:50～11:20）
    - 再現性・完全性／高性能化／要素形状の“ゆがみ”と近似精度
- 2.4.ロッキングとその回避方法
    - ロッキングの種類／メカニズム／回避方法

関数近似

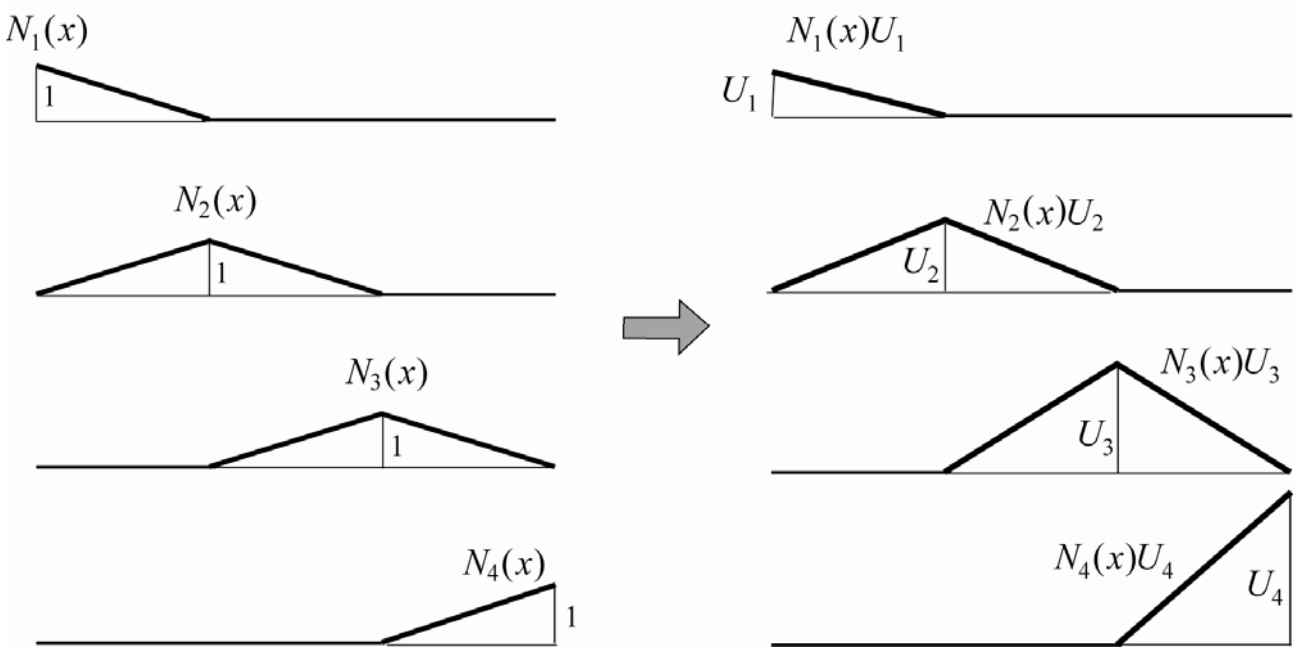
～簡単な関数の重ね合わせで表現：区分線形関数～

元の関数： $f(x) = 12 + 8x - 7x^2 - 2x^3 + x^4$

近似関数： $f(x) \approx \tilde{f}^{(4)}(x) = N_1(x)U_1 + N_2(x)U_2 + N_3(x)U_3 + N_4(x)U_4$

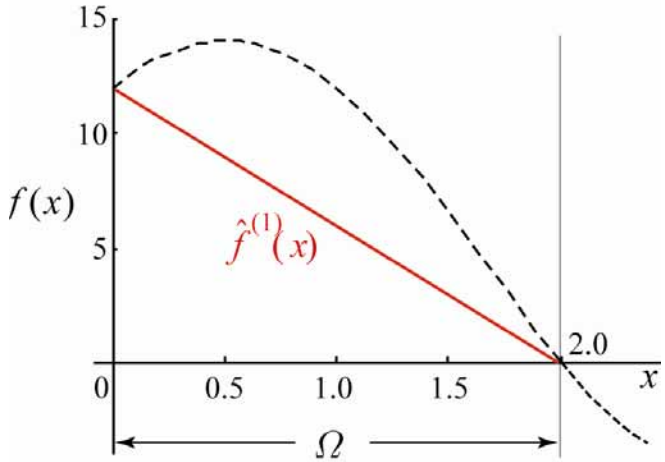
上付き(4)は4要素
下付き5は(5-1)次関数
を意味する

cf. $f(x) \approx \hat{f}_5(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

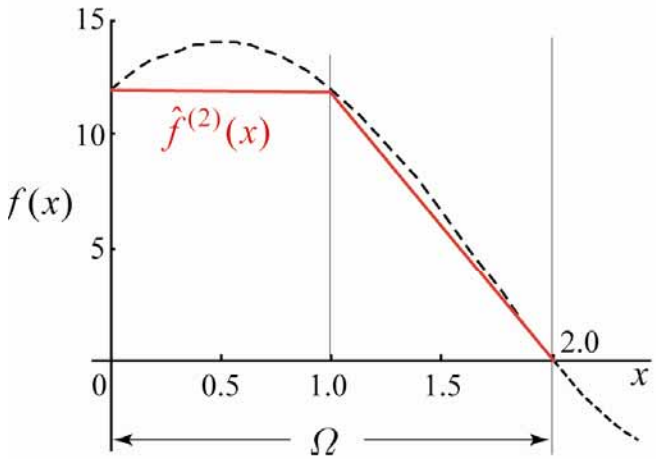


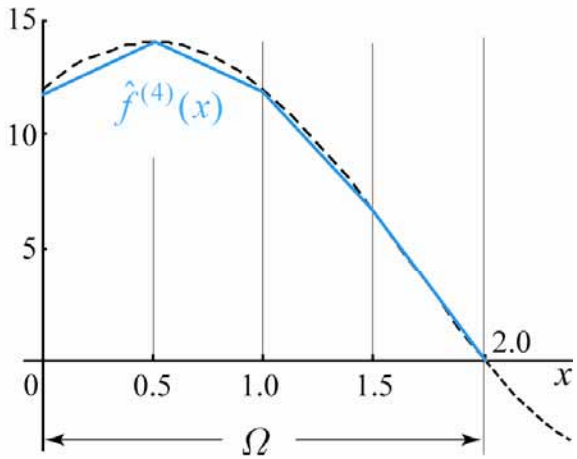
区分的に線形な関数　　区分的に線形な関数×係数

関数近似
～簡単な関数の重ね合わせで表現：区分線形関数～



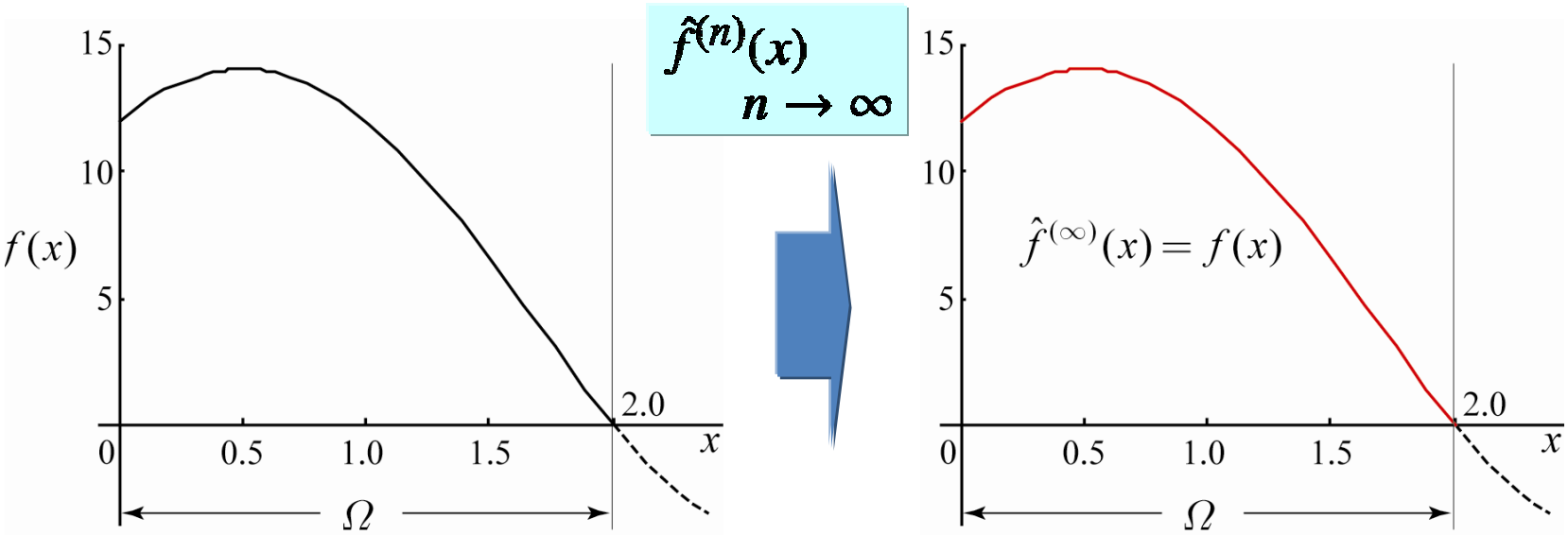
- 多項式の次数は上げない
- 元の関数を区分的な一次（線形）関数を組み合わせて表現





(c) 小領域を小さくする近似

関数近似
～簡単な関数の重ね合わせで表現：区分線形関数～



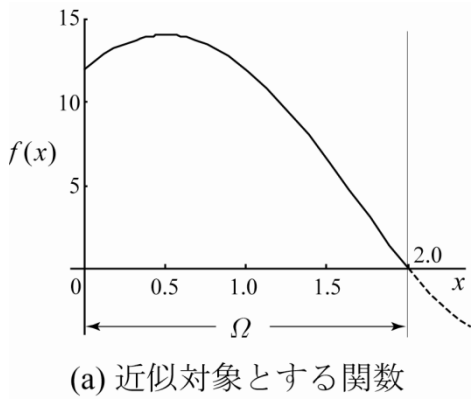
元の関数に収束

- 無限小の部分領域≒点
- 定数（剛体運動）を表現可能

関数近似

～簡単な関数の重ね合わせで表現：多項式～

元の関数： $f(x) = 12 + 8x - 7x^2 - 2x^3 + x^4$

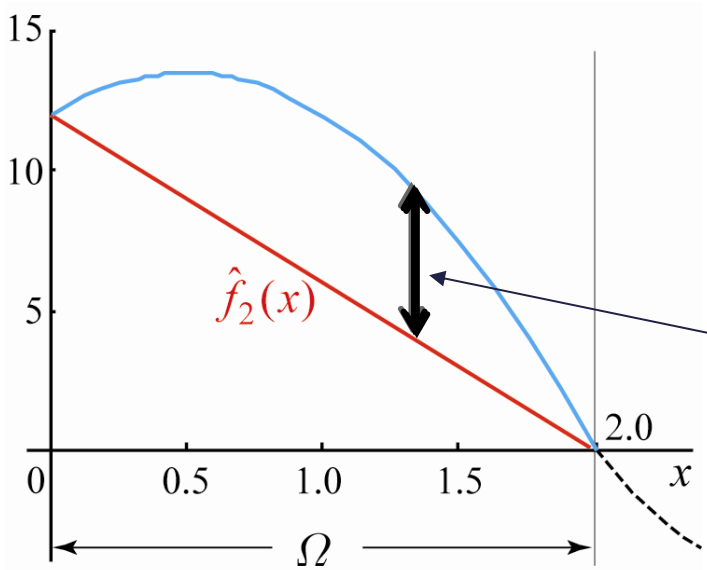


(a) 近似対象とする関数

$\{1, x\}$ を用いて仮定： $f(x) \approx \hat{f}_2(x) = a + bx$

Ω の端点で元の関数と同じ値をとるような近似： $a = 12, b = -6$

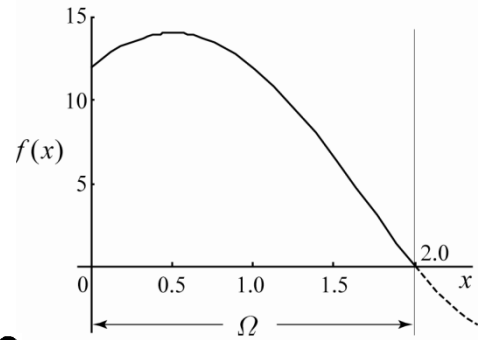
$$\hat{f}_2(x) = 12 - 6x$$



近似誤差
（approximation error）

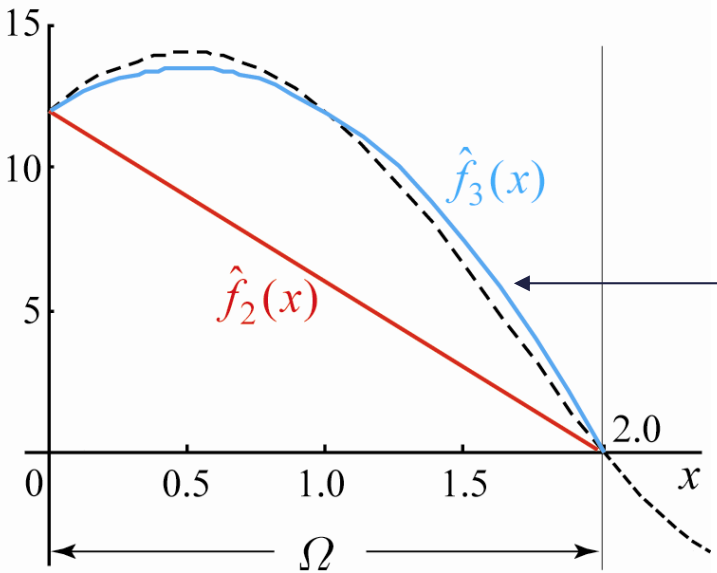
関数近似
～簡単な関数の重ね合わせで表現：多項式～

元の関数： $f(x) = 12 + 8x - 7x^2 - 2x^3 + x^4$



(a) 近似対象とする関数

$\{1, x, x^2\}$を用いて仮定： $f(x) \approx \hat{f}_3(x) = a + bx + cx^2$



$f(0) = f(1) = 12,\ f(2) = 0$

$\hat{f}_3(x) = 12 + 6x - 6x^2$

・元の関数に近づいた
・近似誤差が減少した

(b) 多項式の次数を上げる近似

関数近似
～簡単な関数の重ね合わせで表現：多項式～

元の関数：$f(x) = 12 + 8x - 7x^2 - 2x^3 + x^4$

$\{1, x, x^2, x^3\}$ を用いて仮定：　$f(x) \approx \hat{f}_4(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

問：
- より元の関数に近づく？
- さらに近似誤差が減少する

→

答：
- YES

$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ を用いて仮定：　$f(x) \approx \hat{f}_5(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

問：
- より元の関数に近づく？
- 近似誤差は？

→

問：
- YES
- 誤差 = 0: ZERO!!

関数近似

～簡単な関数の重ね合わせで表現：多項式～

元の関数： $f(x) = 12 + 8x - 7x^2 - 2x^3 + x^4$

近似関数： $f(x) \approx \hat{f}_4(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

再現性
（reproducing prop.）
完全性
（completeness）

・元の関数が多項式
・元の関数の多項式次数と近似関数の多項式次数が同じ

$\hat{f}_4(x) = f(x)$

・元の関数が再生される

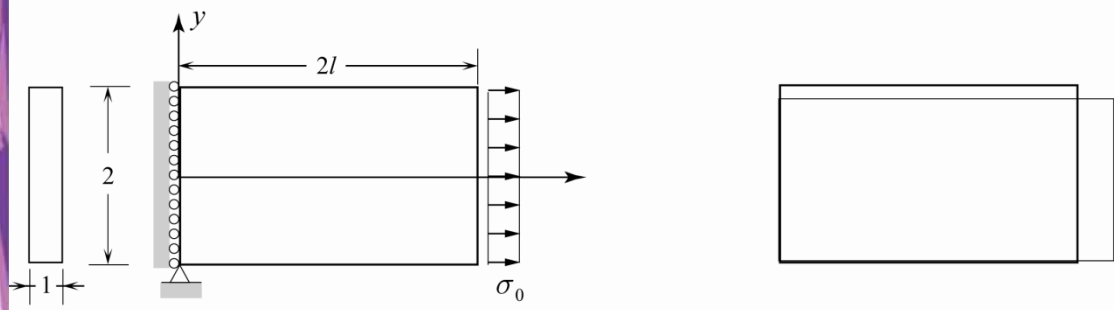
近似関数： $f(x) \approx \hat{f}_5(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + gx^5$

$\hat{f}_5(x) = f(x)$

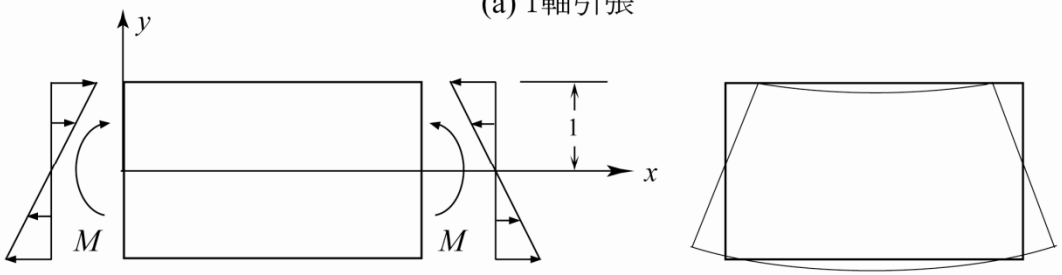
・元の関数が再生される
・$g = 0$（元々不要）

典型的な変形と再現性

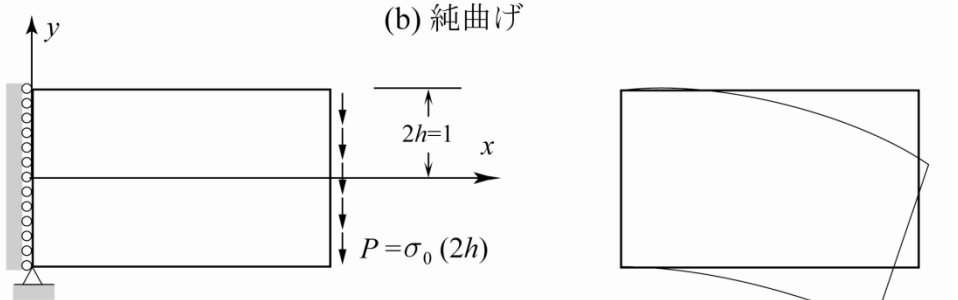
（変形の問題で考えてみると）



(a) 1軸引張



(b) 純曲げ



(c) せん断曲げ

解析解（理論解）

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\sigma_0}{E}x \\ v(x,y) &= -\nu\frac{\sigma_0}{E}y \end{aligned}\right\}$$

σ_0は引張方向の単位面積あたりの分布外力，
Eと　　はそれぞれYoung率とPoisson比

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{M}{EI}xy \\ v(x,y) &= -\frac{M}{EI}\left(x^2+\nu y^2\right) \end{aligned}\right\}$$

Mは曲げ荷重，
Iは断面2次モーメント

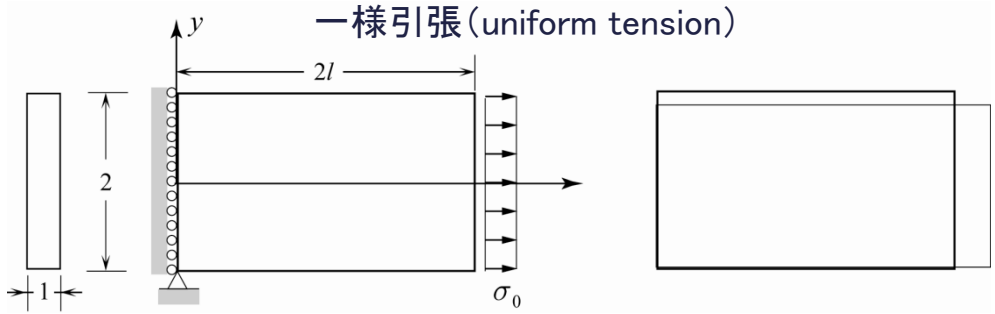
$$A=-2P/h^3,\ B=2Pl/h^3,\ C=(3/2)(P/h)$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{E}\left\{A\left[3x^2y-(2+\nu)y^3\right]+6Bxy\right\} \\ v(x,y) &= \frac{1}{E}\left\{-A\left[x^3+\nu xy^2\right]-3B\left[x^2+\nu y^2\right]-2(1+\nu)Cx\right\} \end{aligned}\right\}$$

典型的な変形と再現性

厳密解：

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\sigma_0}{E}x \\ v(x,y) &= -\nu\frac{\sigma_0}{E}y \end{aligned}\right\}$$

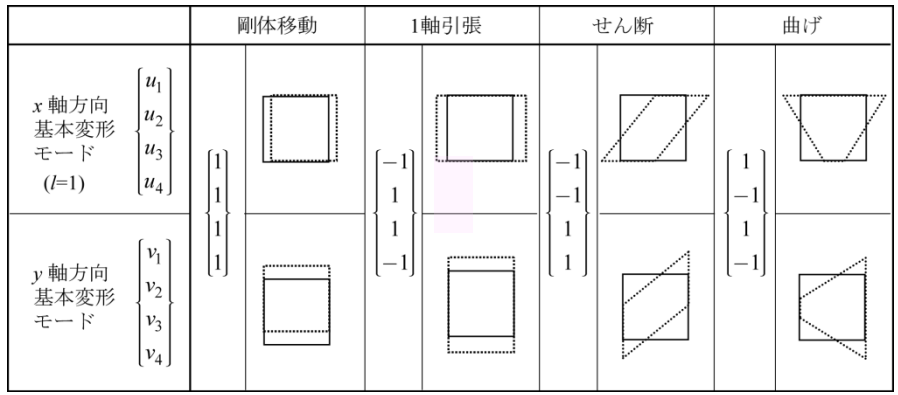


有限要素解（4節点四辺形要素: QUAD4）：

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &\approx \hat{u}(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v(x,y) &\approx \hat{v}(x,y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned}\right\}$$

$$a_2 = \frac{\sigma_0}{E} \qquad b_2 = -\nu\frac{\sigma_0}{E}$$

$$a_1 = a_3 = a_4 = b_1 = b_3 = b_4 = 0$$



$$\left.\begin{aligned} \hat{u}(x,y) &= \frac{\sigma_0}{E}x \\ \hat{v}(x,y) &= -\nu\frac{\sigma_0}{E}y \end{aligned}\right\}$$

変位が線形分布 ＝ 応力・ひずみが一定値

厳密解に一致

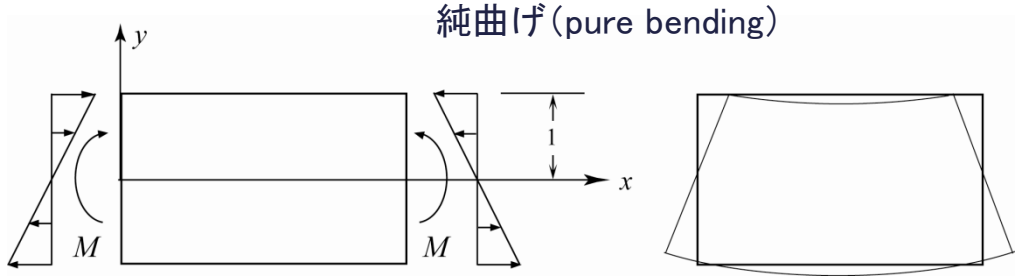
- 仮定した解が厳密解を含む
- 要素の基本変形モードで厳密解を表現可能

典型的な変形と再現性

厳密解：

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{M}{EI}xy \\ v(x,y) &= -\frac{M}{EI}\left(x^2 + \nu y^2\right) \end{aligned}\right\}$$

純曲げ（pure bending）



x軸方向に双1次
y軸方向に2次の変形モード

有限要素解：

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) \approx \hat{u}(x,y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v(x,y) \approx \hat{v}(x,y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy \end{aligned}\right\}$$

には含まれない項がある

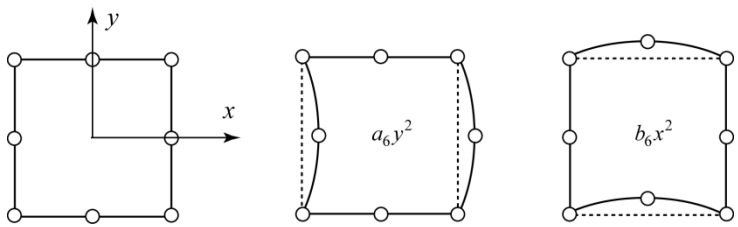
➡ 厳密解を再現できない

しかし，より2次項を含む有限要素解（8節点四辺形要素；二次要素: QUAD8）：

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 x y^2 \\ \hat{v}(x,y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy + b_5 x^2 + b_6 y^2 + b_7 x^2 y + b_8 x y^2 \end{aligned}$$

を仮定すれば厳密解に含まれる項をすべて含む

➡ 厳密解を再現できる
（再現性）

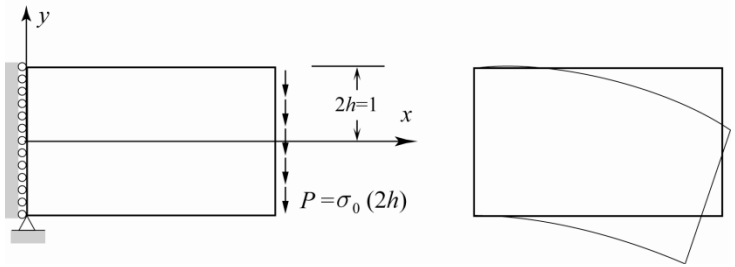


典型的な変形と再現性

厳密解：

$$u(x,y)=\frac{1}{E}\left\{A\left[3x^2y-(2+\nu)y^3\right]+6Bxy\right\}$$
$$v(x,y)=\frac{1}{E}\left\{-A\left[x^3+\nu xy^2\right]-3B\left[x^2+\nu y^2\right]-2(1+\nu)Cx\right\}$$

xの3乗のオーダーを含む



せん断曲げ（shear bending）

1次や2次の多項式を仮定した有限要素（4節点四辺形要素や8節点四辺形要素）
では厳密解を再現できない

この厳密解は多項式形なので，節点を増やして次数を上げることで再生することは可能だが，
一般的な境界値問題の解は多項式形であることは期待できない

次数を上げることは節点数を増やせば，
- 厳密解が見つからないような問題でも精度を上げられる
- しかし，自由度を増やえるので計算コストは高くなる

対処法：要素の高性能化

何をもって“高性能”というか：

> Prof. C. Felippa defined “High Performance Finite Elements” as
>
> “simple elements that deliver engineering accuracy with arbitrary coarse elements”.

例えば，

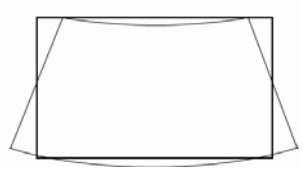
- 単一要素で連続体の曲げモードを再現できること
- 非圧縮材料の変形を表現できること
- 形状により精度劣化しにくい要素
- etc.

典型例：

a. Wilson-Taylor の非適合要素（QM6）：内部自由度追加
b. Simo-Rifaiの拡張ひずみ要素（EAS）：内部自由度追加
c. u-p 混合法要素（複数種類あり）
d. 次数低減積分＋アワーグラス制御：1点積分
e. B-bar要素（選択的次数低減要素）：ある種の混合法要素と等価
and etc.

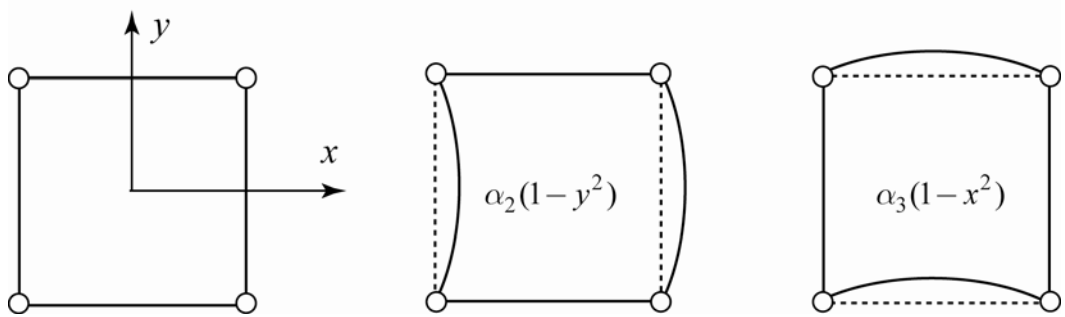
例：Wilson の非適合要素（Q6）

Q. 構造物の変形を最も特徴付けるモードは？ ⇒ A.「曲げ」



曲げ変形の弾性解：

$$\begin{cases} u(x,y) = -\dfrac{\sigma_0}{D_{11}} xy \\ v(x,y) = -\dfrac{\sigma_0}{D_{11}} \left(l^2 - x^2 \right) \end{cases}$$



4節点四辺形要素（QUAD4）

$$\begin{cases} u(x,y) \approx u_h(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(x,y) u_\alpha^e \\ v(x,y) \approx v_h(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(x,y) v_\alpha^e \end{cases}$$

⇒

非適合4節点四辺形要素（Q6）

$$\begin{cases} u(x,y) \approx u_h(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(x,y) u_\alpha^e + (1-x^2)\alpha_1^e + (1-y^2)\alpha_2^e \\ v(x,y) \approx v_h(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(x,y) v_\alpha^e + (1-x^2)\alpha_3^e + (1-y^2)\alpha_4^e \end{cases}$$

曲げモードの追加

追加したモードは

- 非適合（要素辺上で不連続）（incompatible mode）
- 隣接要素とは独立な（節点に帰属しない）内部自由度に対応（internal mode）
- アセンブリング時に考慮する必要がない＝内部縮約可能

$$\int_{\Omega_e} (\partial \delta \boldsymbol{u}_h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \partial \boldsymbol{u}_h h_e dA = \int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{u}_h^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{b}} h_e dA + \int_{\partial \Omega_e} \delta \boldsymbol{u}_h^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t}_e h_e ds \quad \forall \delta \boldsymbol{u}_h$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{P}_e \boldsymbol{\alpha}_e \\ \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{x}) &= \partial \boldsymbol{u}_h = \partial \left(\boldsymbol{N}_e \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{P}_e \boldsymbol{\alpha}_e \right) \\ &= \partial \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{d}_e + \partial \boldsymbol{P}_e \boldsymbol{\alpha}_e \\ &= \boldsymbol{B}_e \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{G}_e \boldsymbol{\alpha}_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{N}_e \delta \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{P}_e \delta \boldsymbol{\alpha}_e \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{x}) &= \partial \delta \boldsymbol{u}_h = \partial \left(\boldsymbol{N}_e \delta \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{P}_e \delta \boldsymbol{\alpha}_e \right) \\ &= \partial \boldsymbol{N}_e \delta \boldsymbol{d}_e + \partial \boldsymbol{P}_e \delta \boldsymbol{\alpha}_e \\ &= \boldsymbol{B}_e \delta \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{G}_e \delta \boldsymbol{\alpha}_e \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{B}_e \delta \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{G}_e \delta \boldsymbol{\alpha}_e \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left(\boldsymbol{B}_e \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{G}_e \boldsymbol{\alpha}_e \right) h_e dA$$

$$= \int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{N}_e \delta \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{P}_e \delta \boldsymbol{\alpha}_e \right)^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{b}} h_e dA + \int_{\partial \Omega_e} \left(\boldsymbol{N}_e \delta \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{P}_e \delta \boldsymbol{\alpha}_e \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t}_e h_e ds$$

$$\left\{ \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_e & \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{G}_e \\ \boldsymbol{G}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_e & \boldsymbol{G}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{G}_e \end{bmatrix} h_e dA \right\} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_e \\ \boldsymbol{\alpha}_e \end{Bmatrix} = \int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}_e^{\mathrm{T}} \end{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} h_e dA + \int_{\partial \Omega_e} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}_e^{\mathrm{T}} \end{Bmatrix} \boldsymbol{t}_e h_e ds$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_e^{dd} & \boldsymbol{K}_e^{d\alpha} \\ \boldsymbol{K}_e^{\alpha d} & \boldsymbol{K}_e^{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_e \\ \boldsymbol{\alpha}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_e \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_e^{dd} \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{K}_e^{d\alpha} \boldsymbol{\alpha}_e = \boldsymbol{F}_e$$

$$\boldsymbol{K}_e^{\alpha d} \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{K}_e^{\alpha\alpha} \boldsymbol{\alpha}_e = \boldsymbol{0}$$

第2式

$$\boldsymbol{K}_e^{\alpha d}\boldsymbol{d}_e+\boldsymbol{K}_e^{\alpha\alpha}\boldsymbol{\alpha}_e=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha}_e=-\left[\boldsymbol{K}_e^{\alpha\alpha}\right]^{-1}\boldsymbol{K}_e^{\alpha d}\boldsymbol{d}_e$$

第1式に代入

$$\boldsymbol{K}_e^{dd}\boldsymbol{d}_e-\boldsymbol{K}_e^{d\alpha}\left(\left[\boldsymbol{K}_e^{\alpha\alpha}\right]^{-1}\boldsymbol{K}_e^{\alpha d}\boldsymbol{d}_e\right)=\boldsymbol{F}_e$$

$$\left(\boldsymbol{K}_e^{dd}-\boldsymbol{K}_e^{d\alpha}\left[\boldsymbol{K}_e^{\alpha\alpha}\right]^{-1}\boldsymbol{K}_e^{\alpha d}\right)\boldsymbol{d}_e=\boldsymbol{F}_e$$

静的縮約
（static condensation）

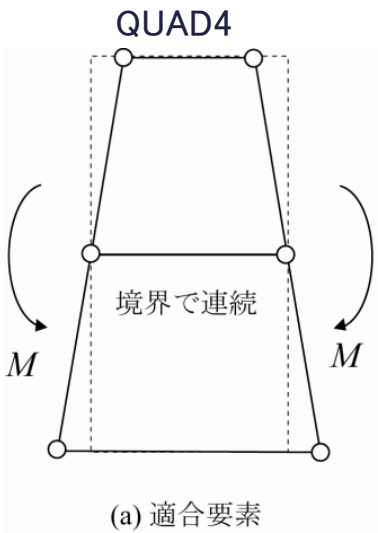
標準的な4節点に関する剛性行列

非適合モードに関する剛性行列の補正項

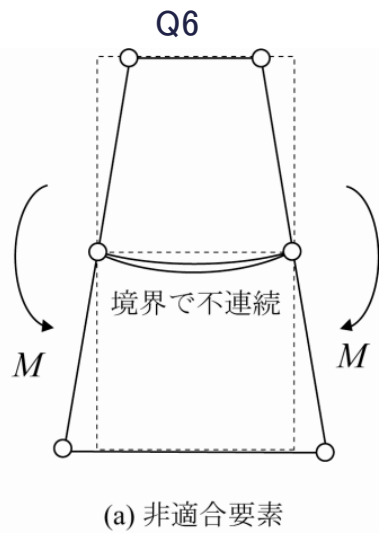
節点自由度のみに関する剛性方程式：

$$\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{d}_e=\boldsymbol{F}_e$$

ここで $\boldsymbol{K}_e=\boldsymbol{K}_e^{dd}-\boldsymbol{K}_e^{d\alpha}\left[\boldsymbol{K}_e^{\alpha\alpha}\right]^{-1}\boldsymbol{K}_e^{\alpha d}$



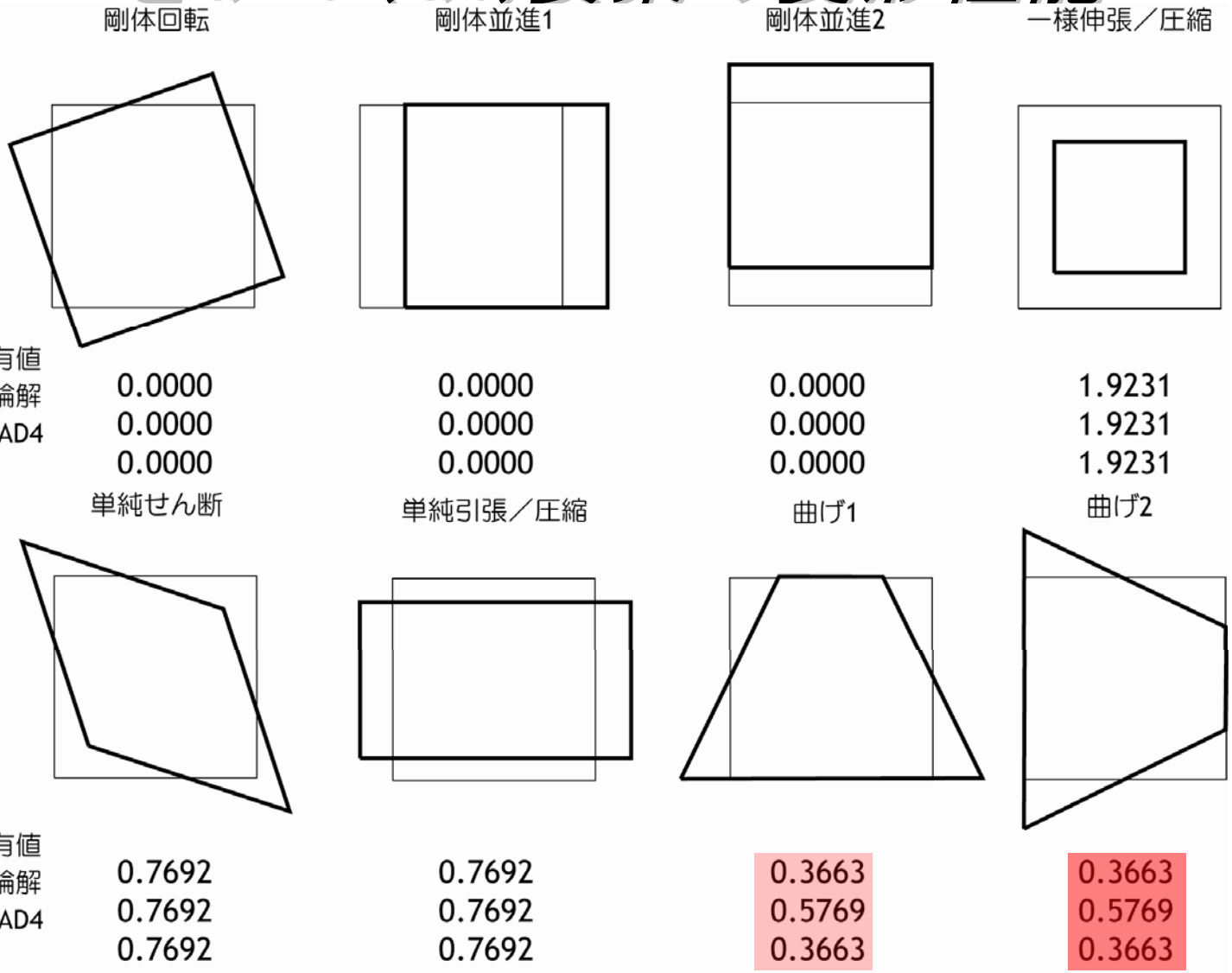
(a) 適合要素



(a) 非適合要素

長方形（もしくは菱形なら）
実際には不連続にならない

QUAD4とQM6 (Q6)要素の変形性能



$E = 1,\ \nu = 0.3$

正方形（長方形）ならば Q6は純曲げの厳密解を再現可能

例：Wilson-Taylor の非適合要素（QM6）

任意形状の四辺形要素で解析する場合、アイソパラメトリック要素としての定式化が必須

変位関数が、“自然座標系で” ξ^2 と η^2 の項を含むように

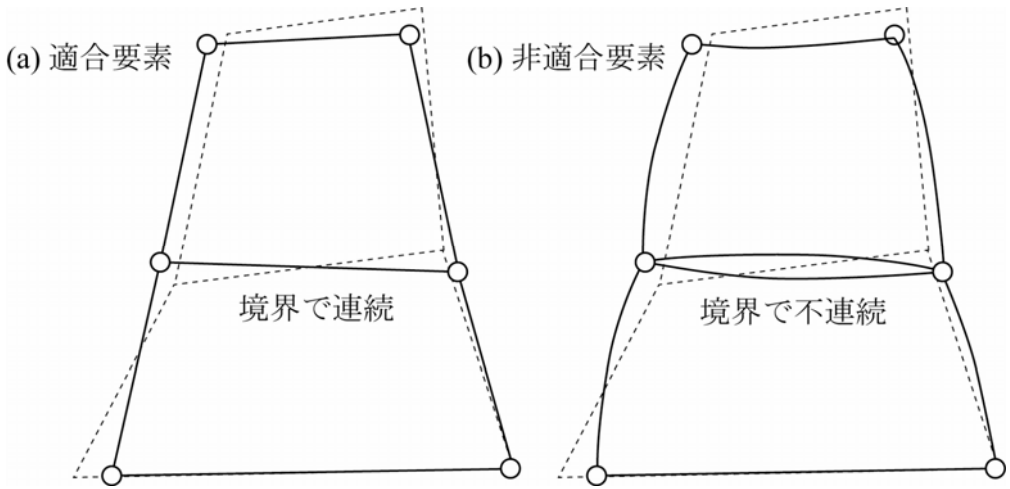
$$\boldsymbol{u}_h(\xi,\eta) = \boldsymbol{N}_e(\xi,\eta)\boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{P}_e(\xi,\eta)\boldsymbol{\alpha}_e$$

のような近似を考える。ここで、

パラメータ　$\boldsymbol{\alpha}_e = \left\{\alpha_1^e \quad \alpha_2^e \quad \alpha_3^e \quad \alpha_4^e\right\}^{\mathrm{T}}$

は、節点に帰属しない内部自由度

$$\boldsymbol{P}_e(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} P_1(\xi,\eta) & 0 & P_2(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & P_1(\xi,\eta) & 0 & P_2(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 & 0 & 1-\eta^2 & 0 \\ 0 & 1-\xi^2 & 0 & 1-\eta^2 \end{bmatrix}$$



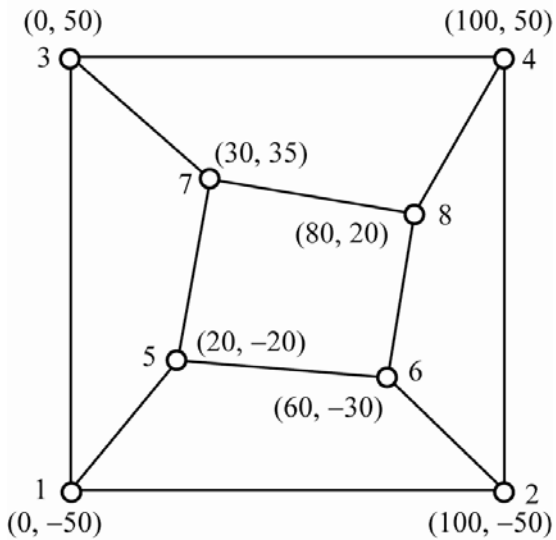
非適合でも，剛体運動と一様変形を表現しうるものであれば許容する

そのような修正を施したWilsonの要素（Q6）をWilson-Taylorの要素（QM6）という

パッチテスト

- 要素間で変位が連続である（適合性）
  - 節点のみならず，要素辺上（境界上）の変位は連続

条件緩和：
非適合を許す



複数要素からなる“パッチ”

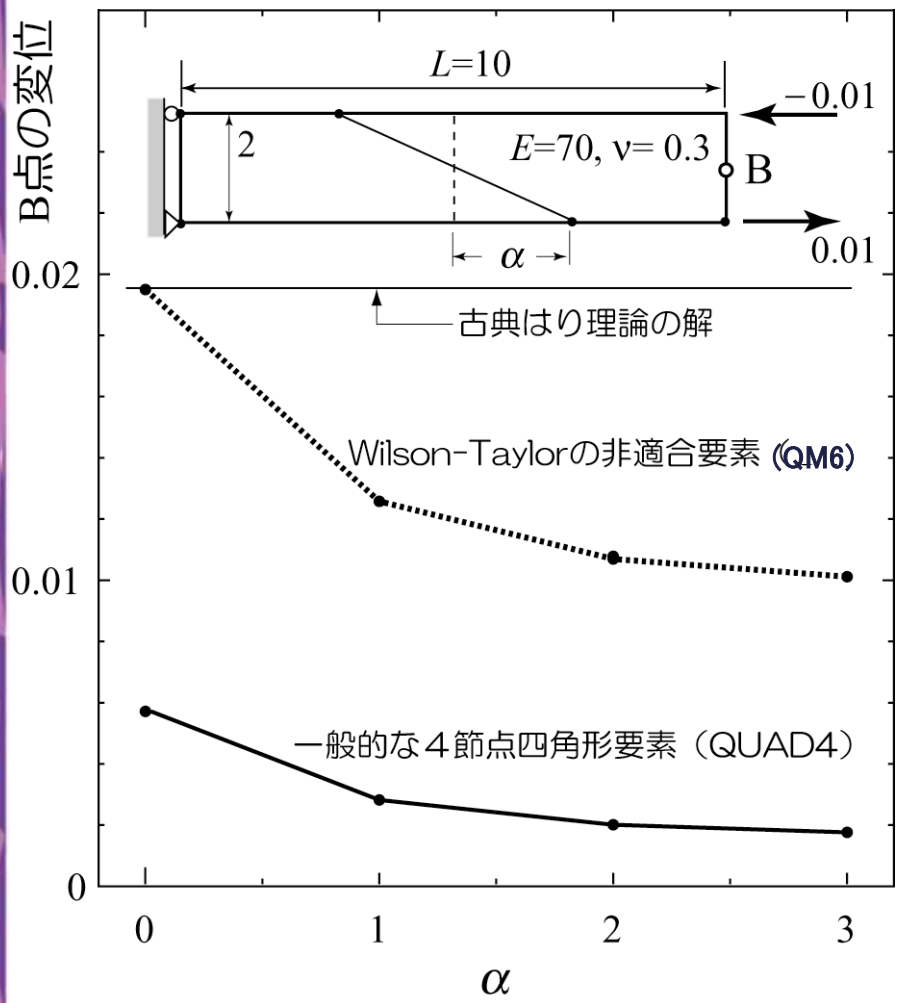
node number	displacement y: $u(x, y)$	displacement x: $v(x, y)$
1	0.0	0.0
2	0.002	0.003
3	0.005	0.001
4	0.007	0.004

典型的なテスト結果：

QUAD4-Iso:	Pass
QUAD4-Non:	Fail
Q6:	Fail
QM6:	Pass

- 剛体運動モードを有する（完全性）
  - 要素内でエネルギー（ひずみ・応力）がゼロになるモード
- 一様変形モードを有する（1次の変位の再現性）
  - 要素内でひずみ（応力）が一定値を取る

QUAD4とQM6要素の変形性能

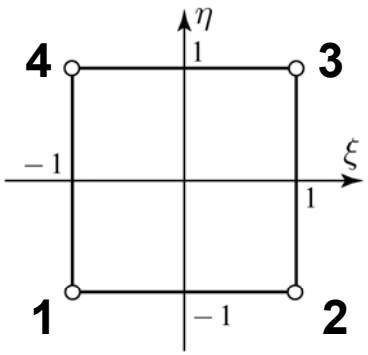


- 曲げを表す非適合モードを内部自由度として加えることにより，曲げ変形を的確（厳密）に表現可能（ただしa=0の場合のみ）
- 長方形からの“ゆがみ”による精度劣化は免れない

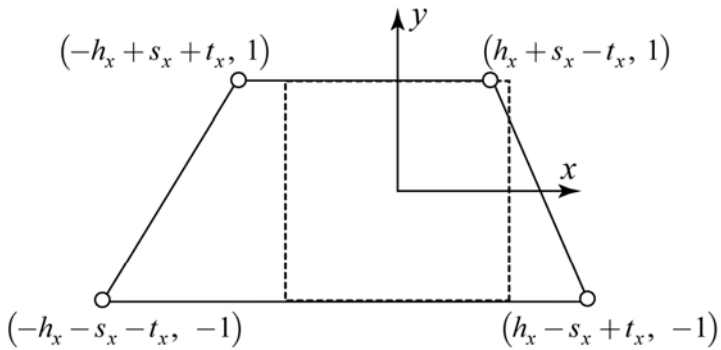
アイソパラメトリック要素のゆがみによる精度劣化

ゆがみの定量化

親要素（master element）



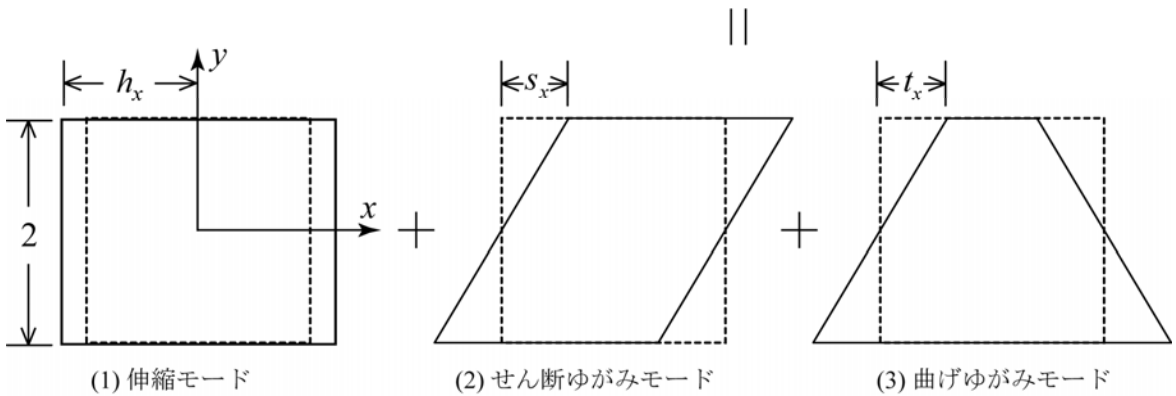
ゆがんだアイソパラメトリック要素



節点座標

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -h_x - s_x - t_x \\ h_x - s_x + t_x \\ h_x + s_x + t_x \\ -h_x + s_x - t_x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



パラメトリックマッピング

$$\begin{cases} x_h(\xi,\eta) = \sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(\xi,\eta) x_\alpha^e \\ y_h(\xi,\eta) = \sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(\xi,\eta) y_\alpha^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_h(\xi,\eta) = h_x\xi + s_x\eta - t_x\xi\eta \\ y_h(\xi,\eta) = \eta \end{cases}$$

“ゆがみ”モードの重ね合わせ

☆“ゆがみ”の影響の評価方法

実座標系での関数形

・一様一軸引張問題の厳密解：$u_{\mathrm{a}}^{\mathrm{exact}}(x,y)=\dfrac{\sigma_0}{E}x+C_{\mathrm{a}}$

・純曲げ問題の厳密解：$u_{\mathrm{b}}^{\mathrm{exact}}(x,y)=-\dfrac{M}{E}xy+C_{\mathrm{b}}$

パラメトリックマッピングにより
自然座標系での関数形に変換

$$\begin{cases} x_h(\xi,\eta)=h_x\xi+s_x\eta-t_x\xi\eta \\ y_h(\xi,\eta)=\eta \end{cases}$$

親要素内で仮定した変位に双一次の多項式分布

$$u_h(x,y)=c_1+c_2\xi+c_3\eta+c_4\xi\eta$$

と比較する.

・一様一軸引張問題の厳密解：

$$u_{\mathrm{a}}^{\mathrm{exact}}(x,y)=\frac{\sigma_0}{E}x+C_{\mathrm{a}}$$

・曲げ問題の厳密解：

$$u_{\mathrm{b}}^{\mathrm{exact}}(x,y)=-\frac{M}{E}xy+C_{\mathrm{b}}$$

$$\begin{cases}x_h(\xi,\eta)=h_x\xi+s_x\eta-t_x\xi\eta\\ y_h(\xi,\eta)=\eta\end{cases}$$

伸縮ゆがみモード

せん断ゆがみモード

曲げゆがみモード

自然座標系での関数形

$$u_{\mathrm{a}}^{\mathrm{exact}}(\xi,\eta)=\frac{\sigma_0}{E}\left(h_x\xi+s_x\eta-t_x\xi\eta\right)$$

$$u_{\mathrm{b}}^{\mathrm{exact}}(\xi,\eta)=-\frac{M}{EI}\left(h_x\xi\eta+s_x\eta^2-t_x\xi\eta^2\right)$$

親要素内での一様引張変形の関数形

親要素内での曲げ変形の関数形

自然座標系で仮定した変位の関数形

$$u_h(x,y)=c_1+c_2\xi+c_3\eta+c_4\xi\eta$$

どんなにゆがんでいても再生可能

$$u_h(x,y)=c_1+c_2\xi+c_3\eta+c_4\xi\eta$$

せん断と曲げゆがみモードに対して再生不可能

“ゆがみ”が大きくなるほど厳密解から遠ざかる：誤差が大きくなる

Contents

目標：固体の有限要素法における近似解の理解

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解

メッシュの切り方／メッシュの細かさ／
要素の位相／要素の近似性能

1.2 メッシュの細分化

メッシュ細分化による精度向上／
非圧縮性材料に対するFEM／メッシュ細分化の落とし穴

2 要素のしくみ

2.1 FEM解の特徴とその数学的背景

弱解／要素の変形性能とひずみエネルギー

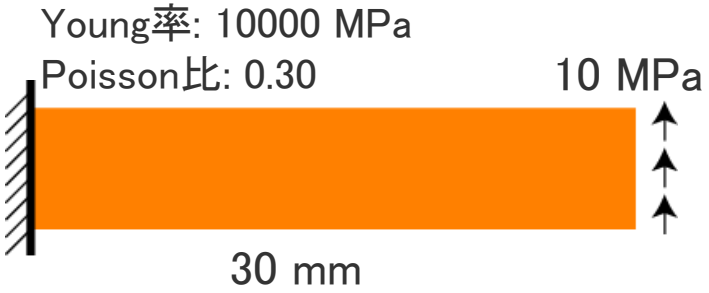
2.3 関数近似

再現性・完全性／高性能化／要素形状の“ゆがみ”と近似精度

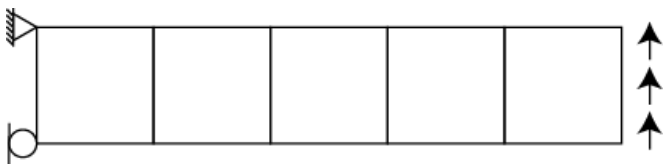
2.4.ロッキングとその回避方法 （11:20～11:50）

ロッキングの種類／メカニズム／回避方法

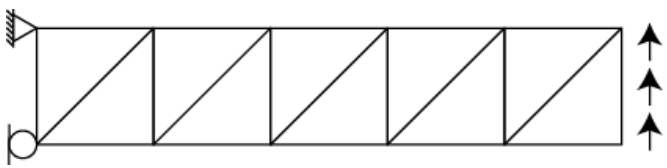
せん断ロッキングの数値実験



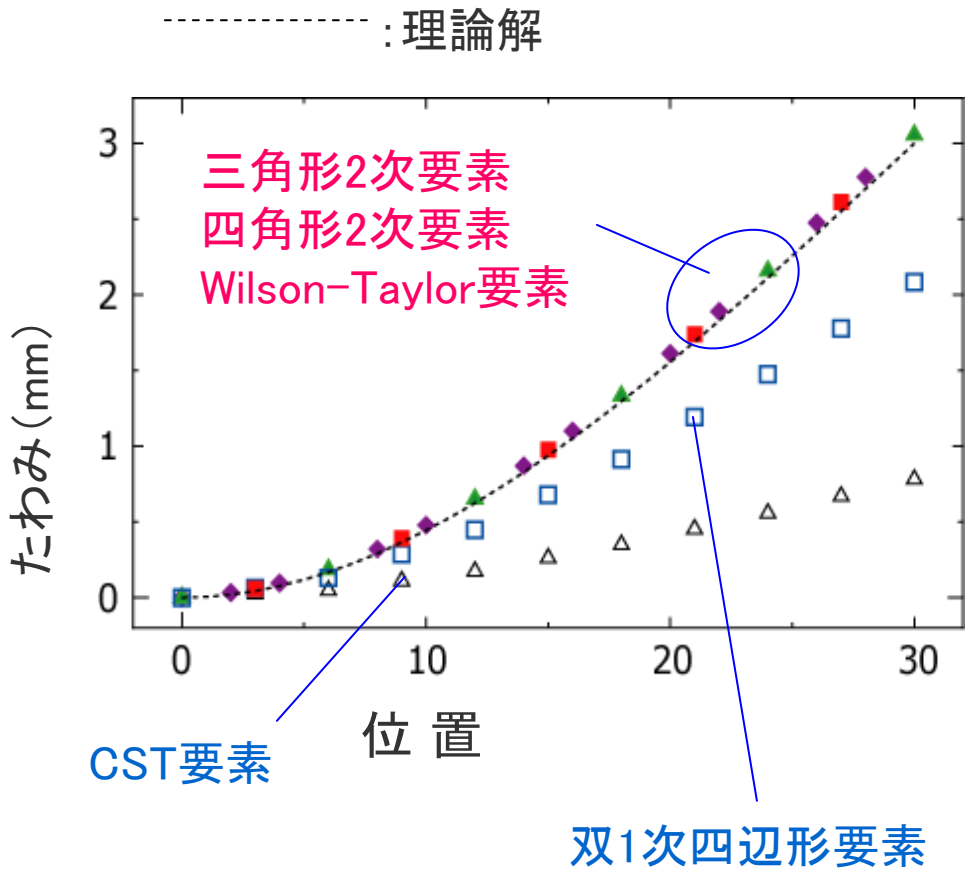
●四角形メッシュ
（QUAD4, QUAD8, QM6）



●三角形メッシュ（CST）

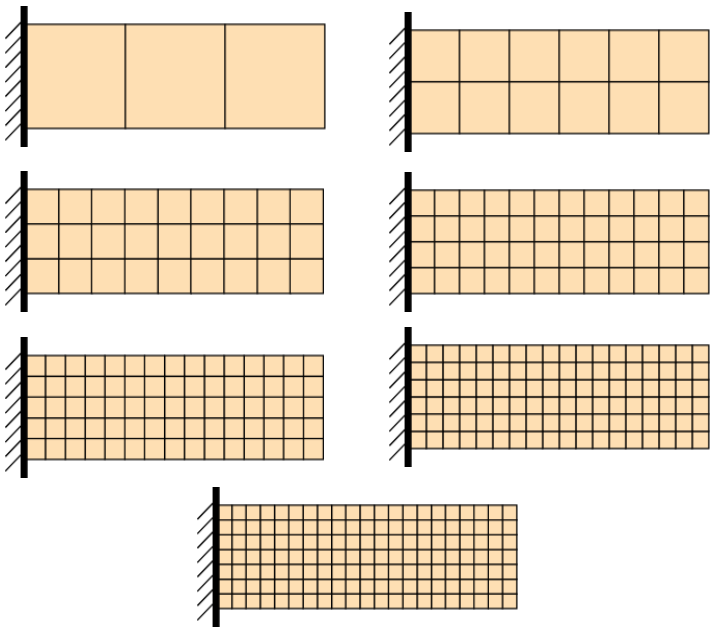


平面応力状態を仮定



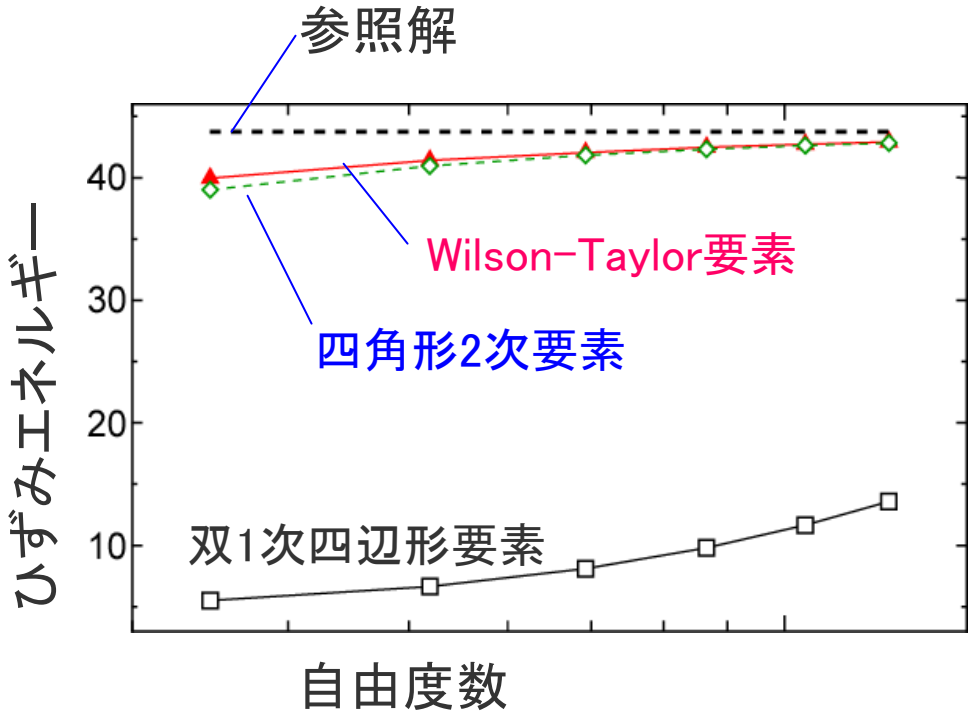
体積ロッキングの数値実験

Young率: 10000 MPa
Poisson比: 0.499



（QUAD4, QUAD8, QM6）

平面ひずみ状態を仮定



体積ロッキングはメッシュを
細かくしても解決できない可能性あり
CST要素も問題外

ロッキングのメカニズム

準備：平面ひずみ問題の線形弾性体構成則

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \left[K\mathbf{i}\mathbf{i}^{\mathrm{T}} + 2G\left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{3}\mathbf{i}\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \right) \right] \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\boldsymbol{D}_{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{dev}} \right) \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left(K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}G \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} \varepsilon_x + \varepsilon_y \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{2}{3}G \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_x - \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_y - \varepsilon_x \\ 3\gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(K + \frac{4}{3}G \right)\varepsilon_x + \left(K - \frac{2}{3}G \right)\varepsilon_y \\ \left(K - \frac{2}{3}G \right)\varepsilon_x + \left(K + \frac{4}{3}G \right)\varepsilon_y \\ G\gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2G \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{dev}}$$

体積弾性係数： $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ ⇐ $K \to \infty$ as $\nu \to 1/2$

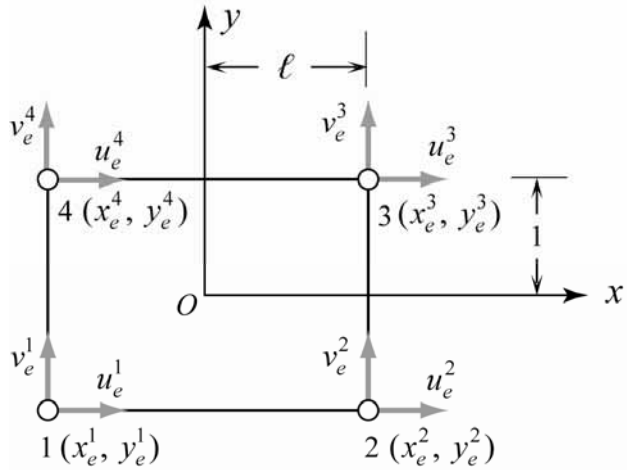
せん断弾性係数： $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

非圧縮性に近い材料は
体積弾性係数が非常に大きい

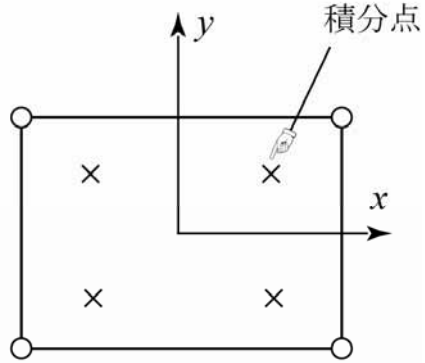
ロッキングのメカニズム

準備: 4節点四辺形要素における変位の近似

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_e = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_e = \begin{Bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \\ v_3^e \\ v_4^e \end{Bmatrix}$$



(a) 節点座標と節点変位



(b) Gaussの2点数値積分公式を用いるときの積分点

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} u(\boldsymbol{x}) \\ v(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} u^h(\boldsymbol{x}) \\ v^h(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(\boldsymbol{x}) u_\alpha^e \\ \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(\boldsymbol{x}) v_\alpha^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{u}}_e \\ \tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{v}}_e \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} N_1^e(\boldsymbol{x}) & N_2^e(\boldsymbol{x}) & N_3^e(\boldsymbol{x}) & N_4^e(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} N_1^e(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell - x)(1 - y) \\ N_2^e(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell + x)(1 - y) \\ N_3^e(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell + x)(1 + y) \\ N_4^e(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell - x)(1 + y) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
N_1^e(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell - x)(1-y) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell - x - \ell y + xy) \\
N_2^e(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell + x)(1-y) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell + x - \ell y - xy) \\
N_3^e(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell + x)(1+y) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell + x + \ell y + xy) \\
N_4^e(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell - x)(1+y) = \dfrac{1}{4\ell}(\ell - x + \ell y - xy)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
u_h(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{4\ell}(\ell - x - \ell y + xy)u_1^e + \frac{1}{4\ell}(\ell + x - \ell y - xy)u_2^e + \frac{1}{4\ell}(\ell + x + \ell y + xy)u_3^e + \frac{1}{4\ell}(\ell - x + \ell y - xy)u_4^e \\
&= \frac{1}{4\ell}\begin{Bmatrix} \ell & \ell & \ell & \ell \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} + \frac{1}{4\ell}\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} x + \frac{1}{4\ell}\begin{Bmatrix} -\ell & -\ell & \ell & \ell \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} y + \frac{1}{4\ell}\begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} xy \\
&= \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e x + \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e y + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e xy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_h(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{4\ell}(\ell - x - \ell y + xy)v_1^e + \frac{1}{4\ell}(\ell + x - \ell y - xy)v_2^e + \frac{1}{4\ell}(\ell + x + \ell y + xy)v_3^e + \frac{1}{4\ell}(\ell - x + \ell y - xy)v_4^e \\
&= \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e x + \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e y + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e xy
\end{aligned}
$$

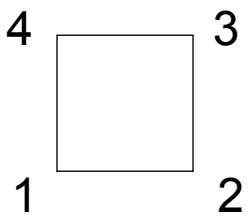
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} u(\boldsymbol{x}) \\ v(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} u^h(\boldsymbol{x}) \\ v^h(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(\boldsymbol{x}) u_\alpha^e \\ \sum_{\alpha=1}^{4} N_\alpha^e(\boldsymbol{x}) v_\alpha^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) \tilde{\boldsymbol{u}}_e \\ \tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) \tilde{\boldsymbol{v}}_e \end{Bmatrix}$$

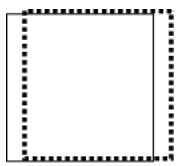
$$u^h(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\ell} \begin{Bmatrix} \ell & \ell & \ell & \ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} + \frac{1}{4\ell} \begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} x + \frac{1}{4\ell} \begin{Bmatrix} -\ell & -\ell & \ell & \ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} y + \frac{1}{4\ell} \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} xy$$

$$= \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e x + \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e y + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e xy$$

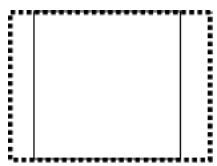
基本変形モード

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\ell} \begin{Bmatrix} \ell \\ \ell \\ \ell \\ \ell \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}} = \frac{1}{4\ell} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{4\ell} \begin{Bmatrix} -\ell \\ -\ell \\ \ell \\ \ell \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

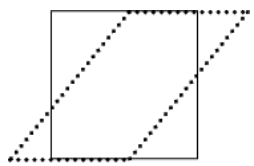




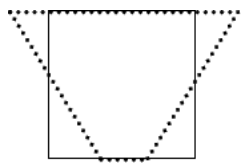
並進



引張・圧縮



せん断



曲げ

（アワーグラスモード）

ロッキングのメカニズム

準備: 4節点四辺形要素におけるひずみの近似

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial u} \approx \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^h \\ v^h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{u}}_e \\ \tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{v}}_e \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x})}{\partial x} = \dfrac{1}{4\ell}\{-1+y \quad 1-y \quad 1+y \quad -1-y\} \\ \dfrac{\partial \tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x})}{\partial y} = \dfrac{1}{4\ell}\{-\ell+x \quad -\ell-x \quad \ell+x \quad \ell-x\} \end{cases}$$

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u^h}{\partial x} = \frac{1}{4\ell}\{-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1\}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} + \frac{1}{4\ell}\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} y = \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e y$$

$$\varepsilon_y \approx \frac{\partial v^h}{\partial y} = \frac{1}{4\ell}\{-\ell \quad -\ell \quad \ell \quad \ell\}\begin{Bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \\ v_3^e \\ v_4^e \end{Bmatrix} + \frac{1}{4\ell}\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}\begin{Bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \\ v_3^e \\ v_4^e \end{Bmatrix} x = \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e x$$

$$\gamma_{xy} \approx \frac{\partial u^h}{\partial y} + \frac{\partial v^h}{\partial x} = \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e x + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e y = \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e x + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e y$$

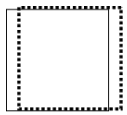
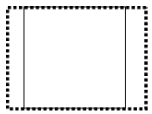
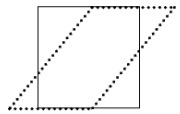
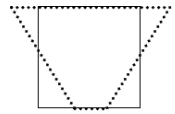
$$\varepsilon_x \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e y$$

$$\varepsilon_y \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e x$$

$$\gamma_{xy} \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e x + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e y$$

基本変形モード:

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\ell}\begin{Bmatrix}\ell\\ \ell\\ \ell\\ \ell\end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}} = \frac{1}{4\ell}\begin{Bmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ -1\end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{4\ell}\begin{Bmatrix}-\ell\\ -\ell\\ \ell\\ \ell\end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{4\ell}\begin{Bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{Bmatrix}$$

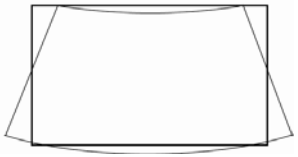
並進:  引張・圧縮:  せん断:  曲げ: 

Remark: 直交性

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} = 0$$

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{S}} = \ell, \quad \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{T}\boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} = 1$$

せん断ロッキングのメカニズム



曲げ変形の弾性理論解：

$$\begin{cases} u = \dfrac{\sigma_0}{E} xy \\ v = \dfrac{\sigma_0}{2E}(\ell^2 - x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\sigma_0}{E} y \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -0 \end{cases}$$

純曲げ変形で
せん断ひずみは
生じない

要素内部のせん断ひずみ分布：

$$\gamma_{xy} \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e x + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e y$$

x の関数としての
”偽りの”せん断ひずみ
（spurious shear）

曲げ変形：

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{u}} = \alpha \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} \\ \tilde{\boldsymbol{v}}_e = \beta \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} \end{cases} \Rightarrow \gamma_{xy} \approx \alpha \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} + \beta \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} + \alpha \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} x + \beta \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} y = \alpha x + \beta y$$

要素内部のせん断ひずみが“恒等的に”ゼロになる条件：

$$\boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e = 0,\ \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e = 0,\ \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e = 0$$

（曲げのモードが表れ難い）

・曲げ変形以外ならば成り立つ
・曲げ変形を除外している

体積ロッキングのメカニズム

要素内部の体積ひずみ分布:

$$\varepsilon_{\mathrm{vol}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \approx \left(\boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e y \right) + \left(\boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e x \right)$$
$$= \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e y + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e x$$

$\nu \to 1/2$　あるいは　$\varepsilon_x + \varepsilon_y \to 0$　のときの非圧縮変形の恒等条件

$$\boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e \to 0,\ \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e \to 0,\ \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e \to 0$$

曲げ変形 $\tilde{\boldsymbol{u}}_e = \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}},\ \tilde{\boldsymbol{v}}_e = \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}$
が起きないような拘束

（曲げのモードが表れないように近似されてしまう）

体積弾性係数: $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)} \to \infty \quad \text{as} \quad \nu \to 1/2$

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{-1}^{1} \int_{-\ell}^{\ell} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{D}_{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{dev}} \right) \boldsymbol{B}_e h_e dx dy = \underbrace{\boldsymbol{K}_{\mathrm{vol}}^e}_{\to \infty} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{dev}}^e$$

ロッキングの回避方法-I：内部自由度を追加する

Wilson-Taylorの要素（非適合モードの追加・4つの内部自由度を追加）

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{N}}_e \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \tilde{\boldsymbol{G}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_e \\ \tilde{\boldsymbol{N}}_e \tilde{\boldsymbol{v}}_e + \tilde{\boldsymbol{G}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_e \end{Bmatrix}$$

内部自由度：$\boldsymbol{\alpha}_e = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_e = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$

$$\tilde{\boldsymbol{G}} = \begin{Bmatrix} 1-x^2 & 1-y^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e y - 2\alpha_1 x \\ \varepsilon_y \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e x - 2\beta_2 y \\ \gamma_{xy} \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e + \left(\boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e - 2\beta_1 \right) x + \left(\boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e - 2\alpha_2 \right) y \end{cases}$$

要素内部のせん断ひずみが“恒等的に”ゼロになる条件：

$$\boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e = 0, \quad \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{u}}_e - 2\beta_1 = 0, \quad \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_e - 2\alpha_2 = 0$$

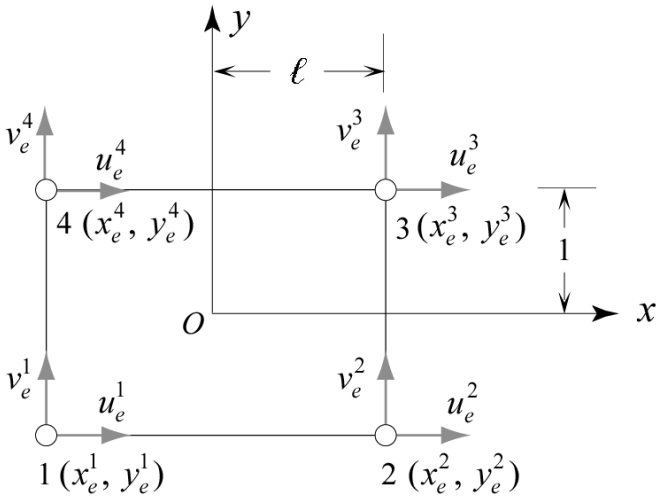
曲げ変形 $\left(\tilde{\boldsymbol{u}}_e = \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}},\ \tilde{\boldsymbol{v}}_e = \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}} \right)$ も許容するように内部自由度を決定＝ロッキング回避

ロッキングの回避方法-I：内部自由度を追加する

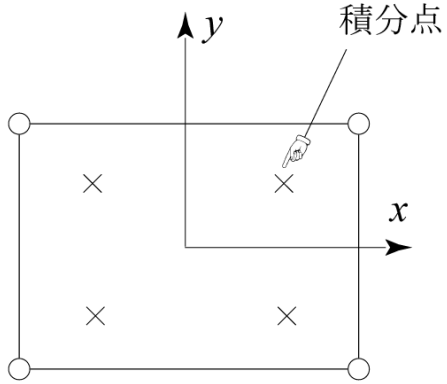
- 内部自由度を追加することでロッキングを回避したり精度向上を図っている要素は多数存在する．なかでも，汎用FEM解析ソフトでも提供されることが多いものとしては，拡張ひずみ仮定（Enhanced Assumed Strain; EAS）要素u-p混合法要素などがある．

- 非適合要素では非適合変位モードを内部自由度として追加したが，EAS要素では拡張ひずみ（enhanced strain）を要素内の独立変数として追加するもので，u-p混合法要素では圧力をそれぞれ内部自由度として追加している．
  - u-p混合法要素：変位（u）と圧力（p）を独立変数に取る変分方程式（弱形式）において，それぞれに対して別々の形状関数を用いる，いわゆる混合補間に基づく要素の総称．圧力を要素間で不連続に近似し，内部自由度として消去するのが一般的．

ロッキングの回避方法–II：積分操作
(a)次数低減積分法

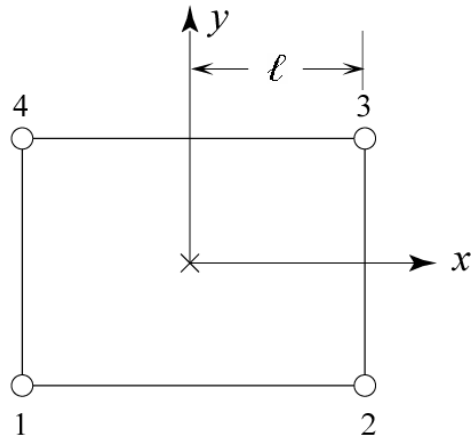


(a) 節点座標と節点変位



(b) Gaussの2点数値積分公式を用いるときの積分点

×：次数低減積分の積分点



(a) 次数低減積分

完全積分：

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_e dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\ell}^{\ell} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_e h_e dxdy$$

$$= \sum_{\mathrm{igx}=1}^{2}\sum_{\mathrm{igy}=1}^{2} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}}(\mathrm{igx},\mathrm{igy}) \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_e(\mathrm{igx},\mathrm{igy}) h_e 4\ell w_x w_y$$

重み

次数低減積分： $\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}}(0,0) \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_e(0,0) h_e 4\ell w_x w_y$ （要素中心での1点積分）

ロッキングの回避方法–II：積分操作

(a)次数低減積分法

reduced integration

$$\varepsilon_x \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e y \qquad \varepsilon_y \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e x$$

$$\gamma_{xy} \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e x + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e y$$

$$\varepsilon_{\mathrm{vol}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e y + \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e x$$

次数低減積分 $\quad x = 0, \quad y = 0$

$$\gamma_{xy} \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e$$

$$\varepsilon_{\mathrm{vol}} \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e + \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e$$

せん断ひずみと体積ひずみに
おけるロッキングの原因となる
成分を要素内で**強制的にゼロ**にする

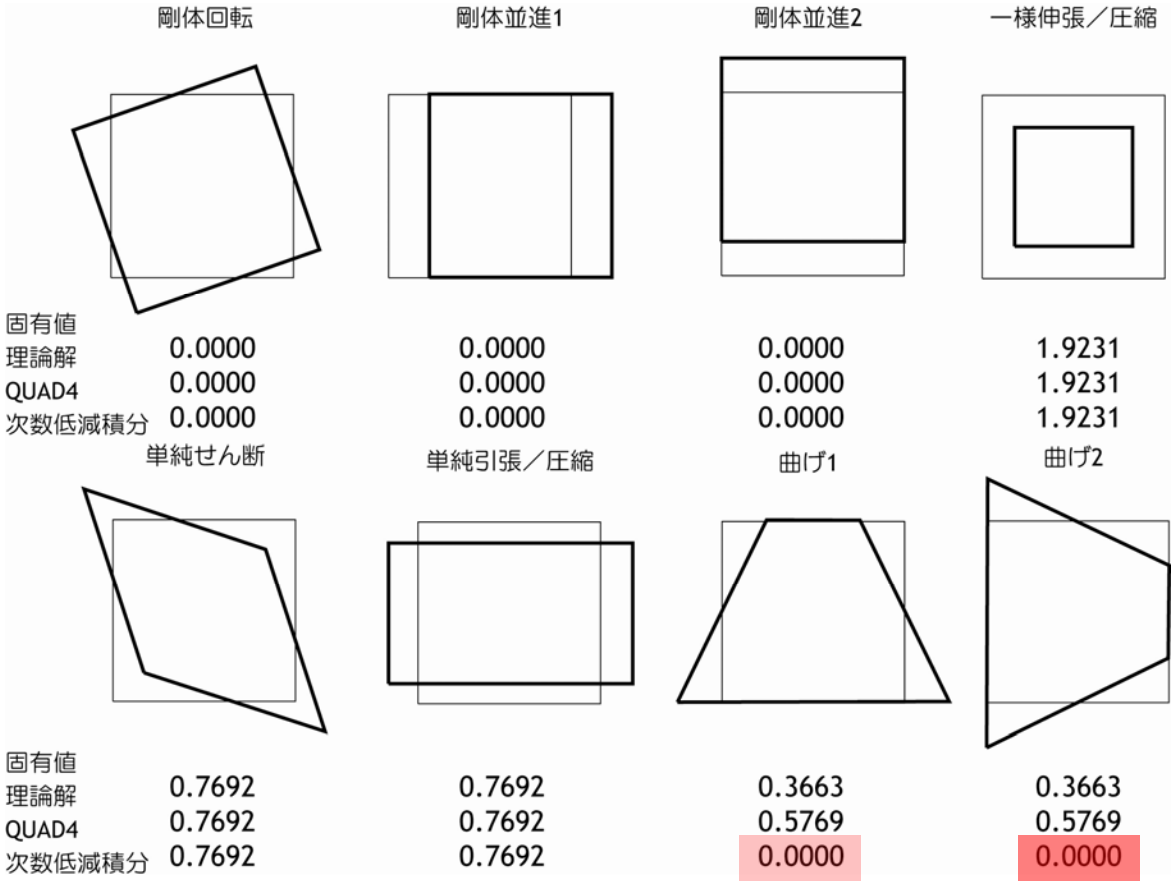
$$\varepsilon_x \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_e \qquad \varepsilon_y \approx \boldsymbol{l}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_e$$

曲げによって生ずる垂直ひずみ
までもゼロにしてしまう：
軟らか過ぎる挙動

曲げ変形 $\left(\tilde{\boldsymbol{u}}_e = \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}},\ \tilde{\boldsymbol{v}}_e = \boldsymbol{h}_{\mathrm{B}}\right)$ のときゼロ

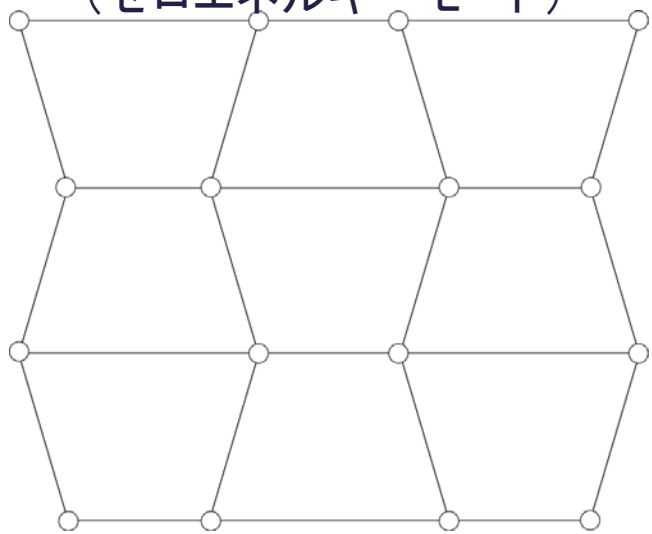
ロッキングの回避方法-II：積分操作

(a)次数低減積分法



$E=1,\ \nu=0.3$

アワーグラスモード
（ゼロエネルギーモード）



（曲げモードが不必要に表れてしまう）

ロッキングの回避方法–II：積分操作
(b)選択的次数低減積分法A: 弾性係数行列の分解

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{K}^e_{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{K}^e_{\mathrm{dev}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{\mathrm{vol}} \boldsymbol{B}_e dV + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{\mathrm{dev}} \boldsymbol{B}_e dV$$

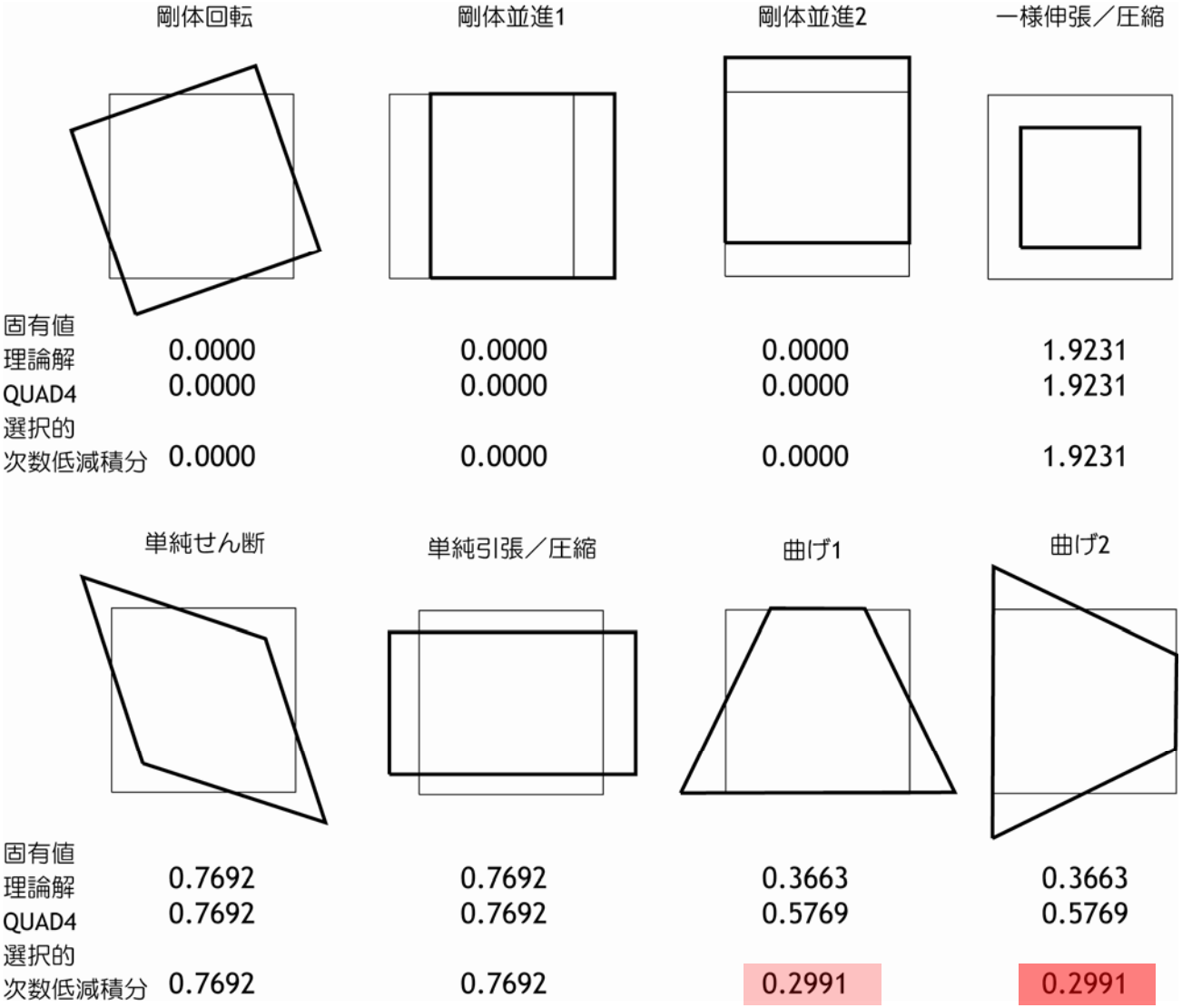
体積変形に関する剛性行列成分を選択的に次数低減積分
(selective reduced integration)

$$\boldsymbol{K}_e = A_e h_e \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}}(0,0) \boldsymbol{D}_{\mathrm{vol}} \boldsymbol{B}_e(0,0) + \int_{-1}^{1}\int_{-\ell}^{\ell} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{\mathrm{dev}} \boldsymbol{B}_e h_e dxdy$$

$$= A_e h_e \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}}(0,0) \boldsymbol{D}_{\mathrm{vol}} \boldsymbol{B}_e(0,0) + \sum_{\mathrm{igx}=1}^{2}\sum_{\mathrm{igy}=1}^{2} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}}(\mathrm{igx},\mathrm{igy}) \boldsymbol{D}_{\mathrm{dev}} \boldsymbol{B}_e(\mathrm{igx},\mathrm{igy}) h_e 4\ell w_x w_y$$

$$= \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{dev}}$$

ロッキングの回避方法–II：積分操作
(b) 選択的次数低減積分法A: 弾性係数行列の分解



固有値				
理論解	0.0000	0.0000	0.0000	1.9231
QUAD4	0.0000	0.0000	0.0000	1.9231
選択的次数低減積分	0.0000	0.0000	0.0000	1.9231

固有値				
理論解	0.7692	0.7692	0.3663	0.3663
QUAD4	0.7692	0.7692	0.5769	0.5769
選択的次数低減積分	0.7692	0.7692	0.2991	0.2991

$E = 1,\ \nu = 0.3$

ロッキングの回避方法–II：積分操作
(c) 選択的次数低減積分法B: B–bar法

「選択的次数低減積分」では，要素剛性行列を体積成分と偏差成分の和に分解できることを前提にしているので，異方性材料や非線形問題などに適用するのは困難

弾性係数行列ではなく、Bマトリックスを体積成分と偏差成分に分解して、
体積成分に対して1点積分を適用

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{vol}} + \varepsilon_{\mathrm{dev}} = \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\mathbf{i} + \left(\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon_{\mathrm{vol}}\right) \approx \boldsymbol{B}_e \boldsymbol{d}_e$$

$$= \left[\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}} + \left(\boldsymbol{B}_e - \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}}\right)\right]\boldsymbol{d}_e = \left(\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}\right)\boldsymbol{d}_e$$

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}\right) dV$$

$$= \int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}} dV + \int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}} dV$$

$$= \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}}(0,0)\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}}(0,0) + \sum_{\mathrm{igx}=1}^{2}\sum_{\mathrm{igy}=1}^{2} \left(\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}\right)^{\mathrm{T}}(\mathrm{igx},\mathrm{igy})\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}(\mathrm{igx},\mathrm{igy}) h_e 4\ell w_x w_y$$

$$= \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{dev}}$$

ロッキングの回避方法–II：積分操作
(c) 選択的次数低減積分法B: B–bar法

【別解釈】　剛性行列の積分計算に先だって，余計な拘束の原因となるひずみ成分を次数低減積分点での値に置き換える方法

$$\boldsymbol{B}_e = \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}$$

$\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}}$を要素中心で評価したもの

$$\bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{vol}} = \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{vol}}(0,0)$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}_e = \bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}$$

で置き換える

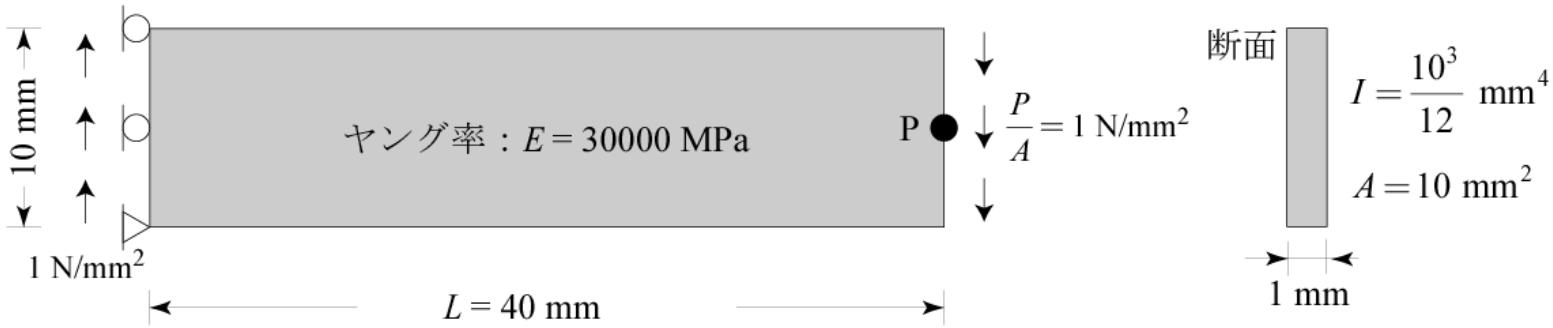
$\bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{vol}}$を用いた要素剛性行列

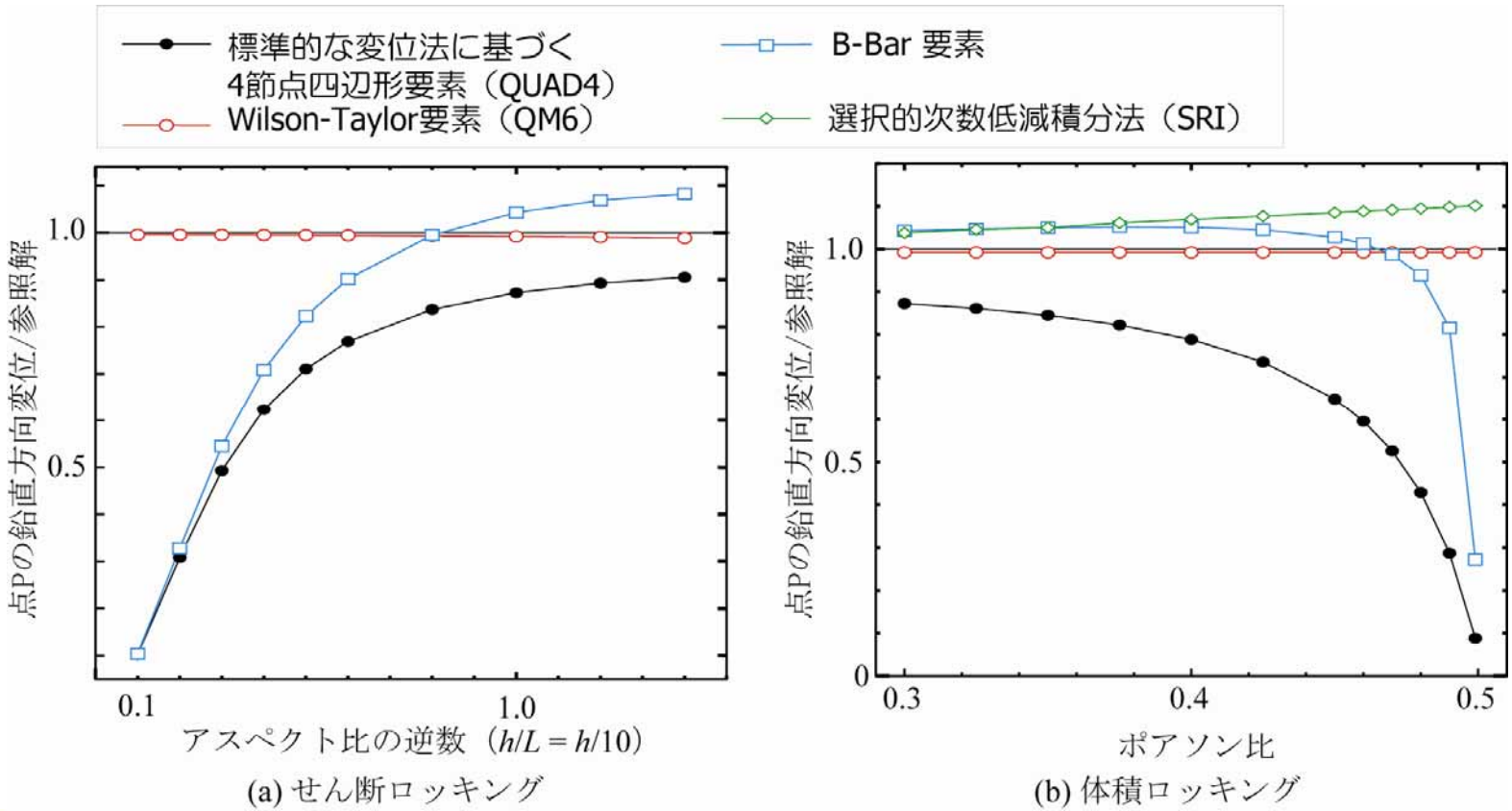
$$\bar{\boldsymbol{K}}_e = \int_{\Omega_e} \bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{B}}_e dV$$

B–bar要素

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_e &= \int_{\Omega_e} \bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{B}}_e dV \\
&= \int_{\Omega_e} \left(\bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{vol}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{vol}} dV + \int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}} dV \\
&= \bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{vol}} \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{B}}_e^{\mathrm{vol}} + \sum_{\mathrm{igx}=1}^{2} \sum_{\mathrm{igy}=1}^{2} \left(\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}}\right)^{\mathrm{T}} (\mathrm{igx}, \mathrm{igy}) \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_e^{\mathrm{dev}} (\mathrm{igx}, \mathrm{igy}) h_e 4\ell w_x w_y \\
&= \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{vol}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{dev}}
\end{aligned}$$

ロッキングの回避：数値計算例

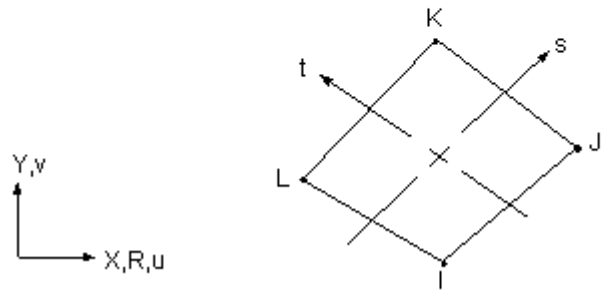




適切な要素の選択

ANSYS ANSYS リリース 10.0 ドキュメント

14.182. PLANE182 – 2-D 4-Node Structural Solid



14.182.2. Theory

If KEYOPT(1) = 0, this element uses $\bar{B}$ method (selective reduced integration technique for volumetric terms) (Hughes(219), Nagtegaal et al.(220)).

If KEYOPT(1) = 1, the uniform reduced integration technique (Flanagan and Belytschko(232)) is used.

If KEYOPT(1) = 2 or 3, the enhanced strain formulations from the work of Simo and Rifai(318), Simo and Armero(319), Simo et al.(320), Andelfinger and Ramm(321), and Nagtegaal and Fox(322) are used. It introduces 5 internal degrees of freedom to prevent shear and volumetric locking for KEYOPT(1) = 2, and 4 internal degrees of freedom to prevent shear locking for KEYOPT(1) = 3. If mixed u-P formulation is employed with the enhanced strain formulations, only 4 degrees of freedom for overcoming shear locking are activated.

PLANE182 要素テクノロジ

PLANE182 では、$\bar{B}$ 法 (選択低減積分法とも呼ばれます)、一様低減積分法、または強化ひずみ定式化法のいずれかを使用できます。それぞれは以下のとおりです。

- **$\bar{B}$ 法 (選択低減積分)**

  これは、ほぼ非圧縮性の材料の場合に、体積ロッキングの防止に役立ちます。このオプションでは、ガウス積分点における体積ひずみを、要素の平均体積ひずみで置き換えています。ただしこの手法は、曲げが支配的な問題に対しては、せん断ロッキングを防止できません。そのような場合には、この要素の強化ひずみ定式化を使用してください。曲げ変形が支配的かどうか明確でない場合は、強化ひずみ定式化の使用が推奨されます。詳細については、『*ANSYS, Inc. Theory Reference*』を参照してください。

- **一様低減積分**

  これもまた、ほぼ非圧縮性の場合に、体積ロッキングの防止に役立ちます。この場合は 1 点積分となるため、このオプションは $\bar{B}$ 法 (選択低減積分) よりも効率がよいです。しかし、アワーグラス制御から生じる疑似エネルギーが、解の精度に悪影響を与える恐れがあります。

  このオプションを使用した場合、トータルエネルギー (**ETABLE** の SENE ラベル) とアワーグラス制御から生じる疑似エネルギー (**ETABLE** の AENE ラベル) を比較することによって、解の精度をチェックできます。トータルエネルギーに対する疑似エネルギーの比が 5% 未満の場合、解は一般に容認できるものと言えます。この比が 5% を越える場合、メッシュをもっと細かくする必要があります。トータルエネルギーと疑似エネルギーは、ソリューション段階で **OUTPR**,VENG コマンドを使用してモニターすることもできます。

  一様低減積分の詳細については、『*ANSYS, Inc. Theory Reference*』を参照してください。

- **強化ひずみ定式化**

  これは、曲げが支配的な問題におけるせん断ロッキングと、ほぼ非圧縮性の材料における体積ロッキングを防止します。この定式化では、4 個の内部的な自由度 (ANSYS ユーザーはアクセスできない) を導入することによって、平面ひずみ問題、軸対称問題、一般化平面ひずみ問題 (これらにすべて u-P 混合定式化を使用した場合)、および平面応力問題におけるせん断ロッキングを克服します。平ひずみ問題、軸対称問題、一般化平面ひずみ (これらにすべて純粋な変位定式化を使用した場合) では、体積ロッキングに備えて、さらに追加の内部自由度を導入します (合計 5 個の内部自由度になります)。すべての内部自由度は要素レベルで自動的に導入され、そして縮退により消去されます。

  特別な内部自由度を導入しそれを静的縮退する必要があるため、このオプションは、$\bar{B}$ 法 (選択低減積分) や一様低減積分オプションよりは効率が落ちます。

  一様低減積分の詳細については、『*ANSYS, Inc. Theory Reference*』を参照してください。

- **単純強化ひずみ定式化**

  これは、曲げが支配的な問題におけるせん断ロッキングを防止します。強化ひずみ定式化の特別なケースで、常に 4 個の内部的な 自由度 (ANSYS ユーザーはアクセスできません) を導入します。平面応力状態では、この定式化は強化ひずみ定式化と同じで、KEYOPT(1) = 2 だけが使用できます。体積ロッキングに対処するための内部自由度がないため、u-P 混合定式化を同時に使用しなければ、ほぼ非圧縮性の材料に対してこの定式化は使用しないでください。u-P 混合定式化とともに使用すれば、単純強化ひずみ定式化は強化ひずみ定式化と同じ結果を出力します。すべての内部自由度は要素レベルで自動的に導入され、そして縮退により消去されます。

  特別な内部自由度を導入しそれを静的縮退する必要があるため、このオプションは $\bar{B}$ 法 (選択低減積分) や一様低減積分オプションよりも効率は落ちますが、少ない数の内部自由度を使用しているため強化ひずみ定式化よりは効率がよいです。

  単純強化ひずみ定式化の詳細については、『*ANSYS, Inc. Theory Reference*』を参照してください。

2. メッシュや要素で答えが変わる

2.3 まとめ

- *FEMの近似解が変化する要因*
  - メッシュの切り方
    - 要素形状（正方形からの変動＝ゆがみ）
  - メッシュの細かさ
    - 要素分割数（要素数，節点数）
  - 要素の位相
    - 三角形，四角形など
  - 要素の近似性能：要素内での関数の表現方法
    - 線形・高次
    - 非適合
    - （混合補間）

2. メッシュや要素で答えが変わる

2.3 まとめ

- 「要素」と「メッシュ」の違いによって得られる答え（近似解）は大きく異なりうる
  - FEMによる解析の精度を左右する因子
    - 要素分割数を増やす（要素数を増やす＝メッシュを細かくする）
    - 要素の位相を変更する（三角形要素から四角形要素に変更する）
    - 要素性能を高めるI：高次要素（2次以上の要素）を使用する
    - 要素性能を高めるII：高性能要素（例えば非適合要素）を使用する
  - 例外：非圧縮性材料
  - メッシュ細分化による精度向上を図る際
    - 点載荷・点支持には注意が必要
- ただし，これらは例題を通して

  要素やメッシュに関して注意を喚起しただけで，理論との対応についての説明は省略．特に，
  - なぜ要素によって答えが違うのか，
  - なぜ様々な種類の要素があるか

  などについては「要素のからくり」を学ばねばならない．

3. 要素のからくり

3.4 まとめ

- 一般的な関数近似では，
  - 多項式次数を高めることで精度を高めることができる
  - 定義域を分割して区分的に低次の多項式の連結により一般的な関数近似が可能であるが，分割領域を小さくすること（分割数を増やすこと）で精度を高めることができる
- 有限要素法における要素内の変位の近似は
  - 多項式次数を高めたり，非適合モードを追加したり，要素の大きさを小さくしたりすることで精度を高めることができる
  - その関数形が，求めたい問題の解の関数形に含まれる項をすべて含むならば厳密解を再生する
- 任意にゆがんだ四辺形要素は必然的にアイソパラメトリック要素でなければならず，
  - 変位の線形分布（すなわち一様変形）は厳密に再現可能であるが，
  - 座標系のパラメトリック変換により実要素内で低次の関数形であっても親要素内では高次化し，親要素内で仮定した低次の関数形では対応できずに誤差を生ずる

4. ロッキングとその逃れ方

まとめ

- ロッキングのメカニズム
  - せん断ロッキング
    - せん断ひずみがゼロとなるとき、曲げ変形を生じにくくなる
    - 純曲げ変形時にせん断ひずみを生じて、エネルギーを過大評価
  - 体積ロッキング
    - 体積変化がゼロ（非圧縮条件）のとき、曲げ変形を生じにくくなる
- ロッキングの回避方法
  - 要素内部自由度を追加
  - 積分操作によるロッキング回避方法
    - 次数低減積分法
    - 選択的次数低減積分法
    - B-Bar要素（選択的次数低減積分法）
  - 高次要素

付録

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

［補］収束性に関するケーススタディ：メッシュ細分化による精度向上～h収束（均質）～

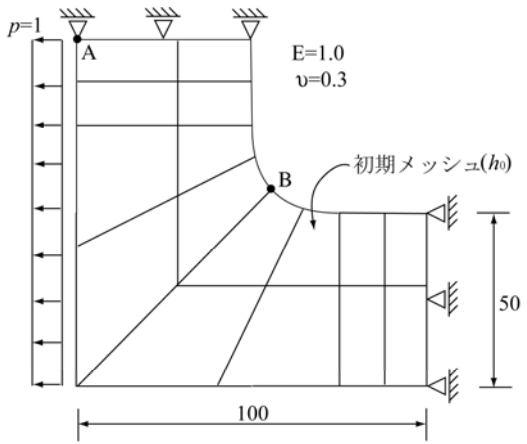


図-4　特異性を有さないL型領域問題のオリジナルモデル_(b)-1

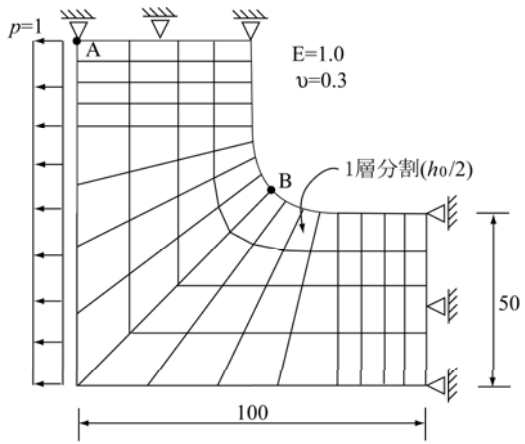


図-5　特異性を有さないL型領域問題の1層分割モデル_(b)-2

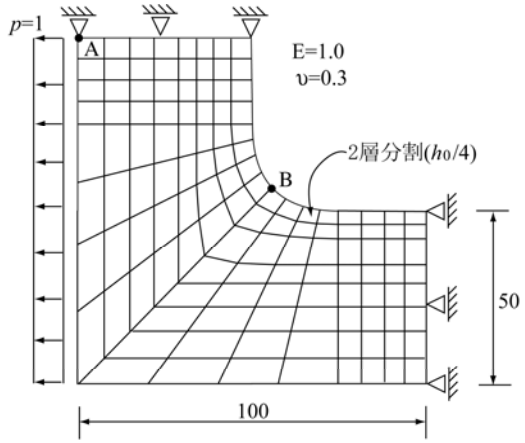
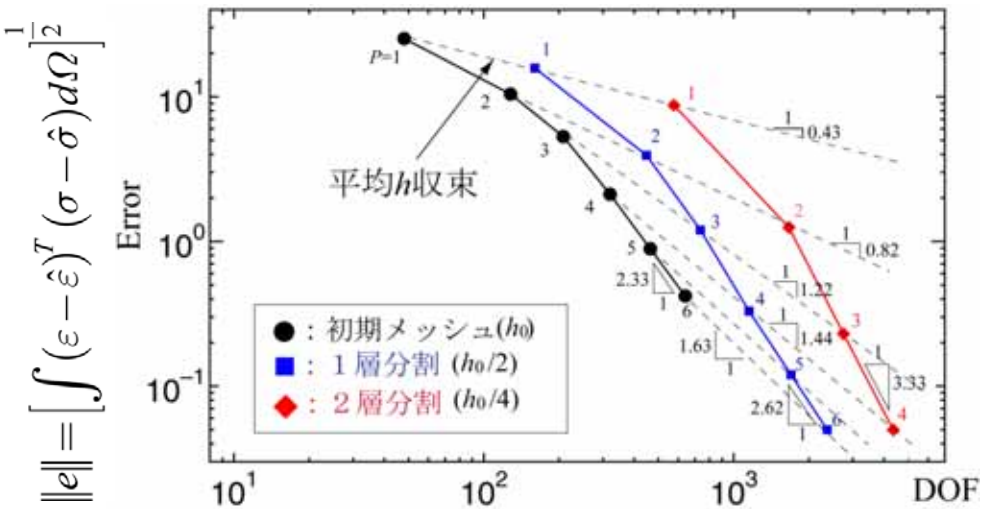


図-6　特異性を有さないL型領域問題の2層分割モデル_(b)-3



DOF=自由度
Eror=エネルギーノルムでの相対誤差

(b)のパーセント誤差とDOFの関係

付録

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

［補］収束性に関するケーススタディ：メッシュ細分化による精度向上～h収束（均質・特異性）～

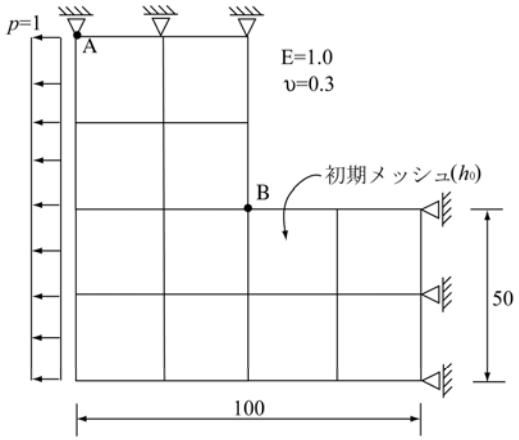


図-1　特異性を有するL型領域問題のオリジナルモデル_(a)-1

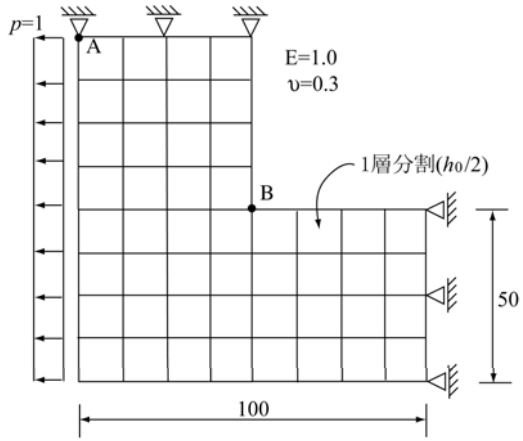


図-2　特異性を有するL型領域問題の１層分割モデル_(a)-2

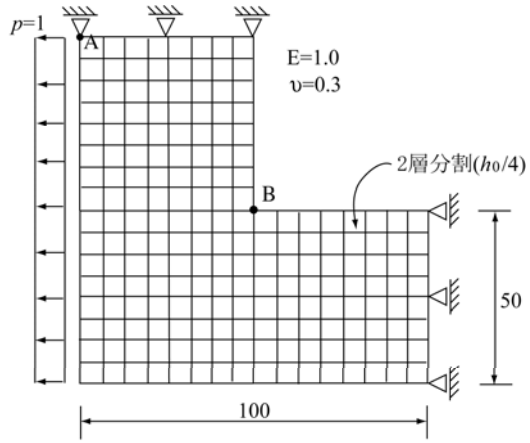
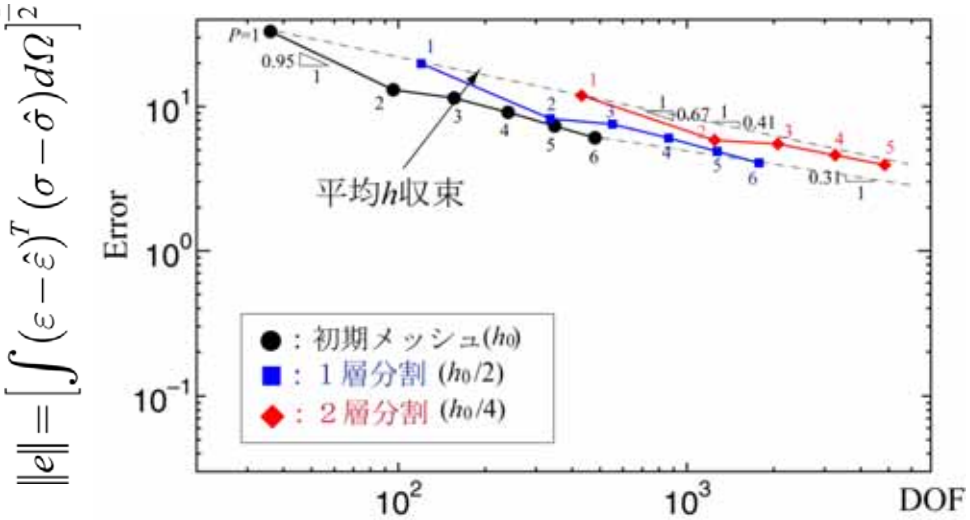


図-3　特異性を有するL型領域問題の2層分割モデル_(a)-2



DOF=自由度
Eror=エネルギーノルムでの相対誤差

(a)のパーセント誤差とDOFの関係

付録

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

［補］収束性に関するケーススタディ：メッシュ細分化による精度向上～h収束（非均質）～

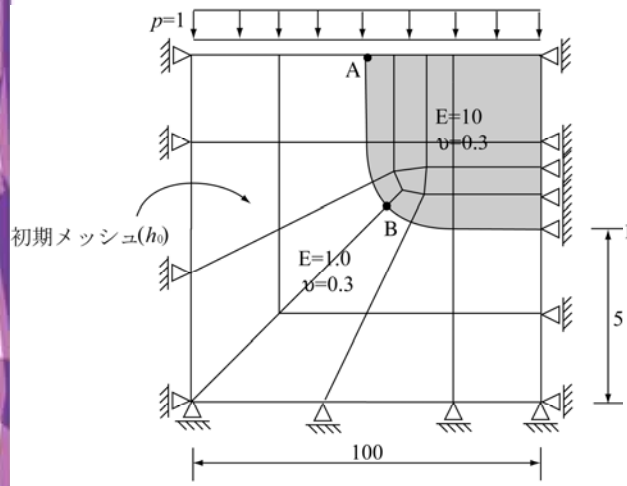


図-10　特異性を有さない非均質L型領域問題のオリジナルモデル_(d)-1

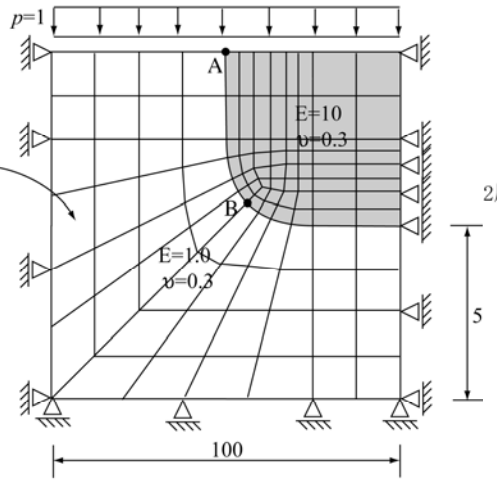


図-11　特異性を有さない非均質L型領域問題の1層分割モデル_(d)-2

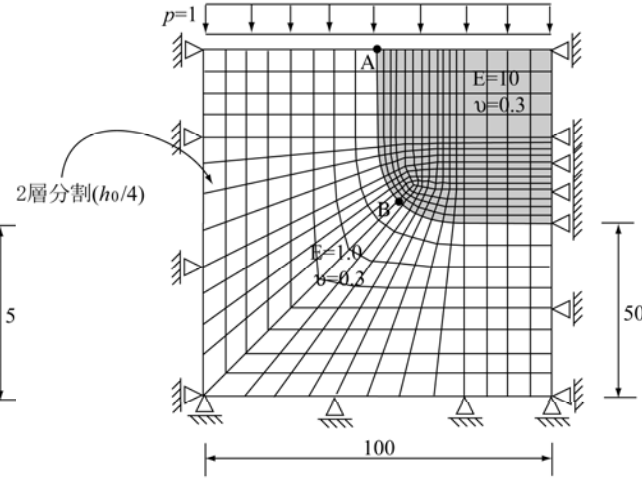
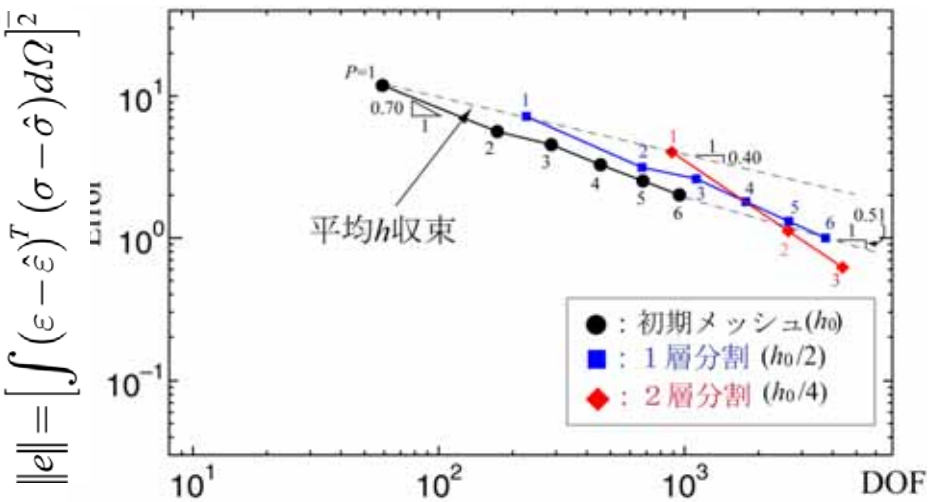


図-12　特異性を有さない非均質L型領域問題の2層分割モデル_(d)-3



DOF=自由度
Eror=エネルギーノルムでの相対誤差

(d)のパーセント誤差とDOFの関係

付録

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

［補］収束性に関するケーススタディ：メッシュ細分化による精度向上～h収束（非均質・特異）～

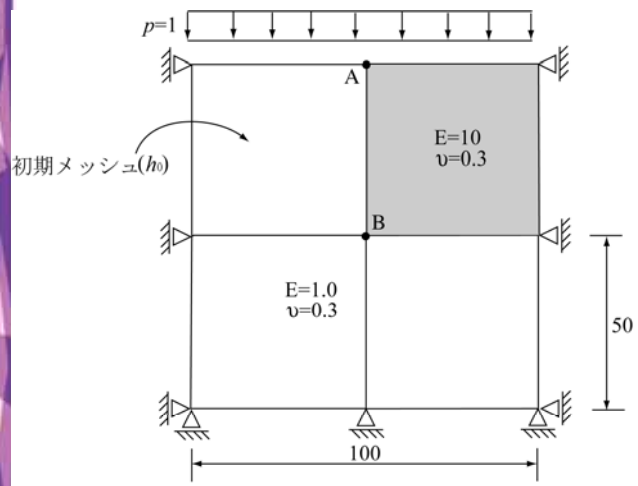


図-7　特異性を有する非均質L型領域問題のオリジナルモデル

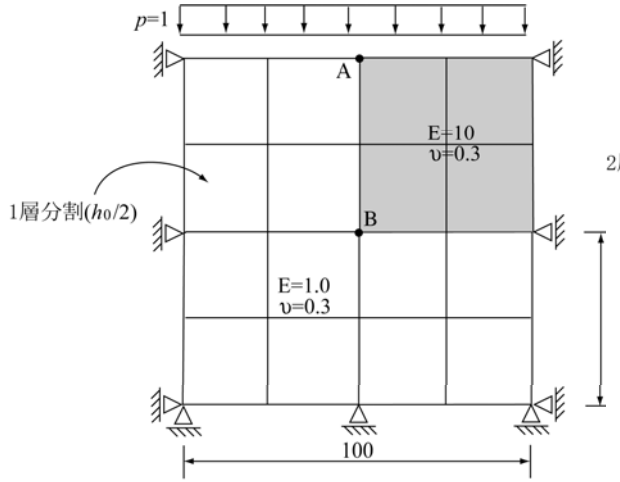


図-8　特異性を有する非均質L型領域問題の1層分割モデル

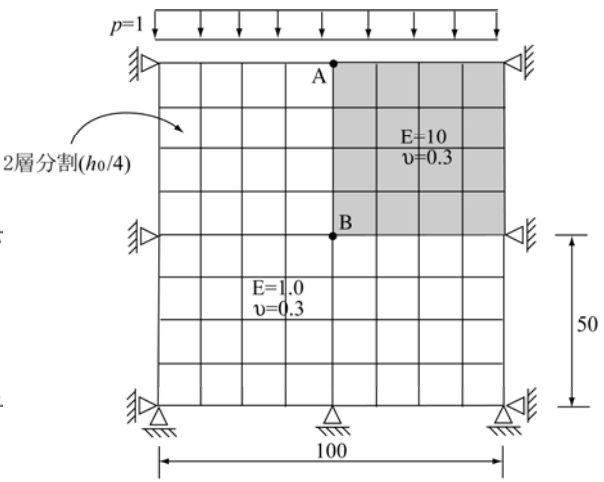
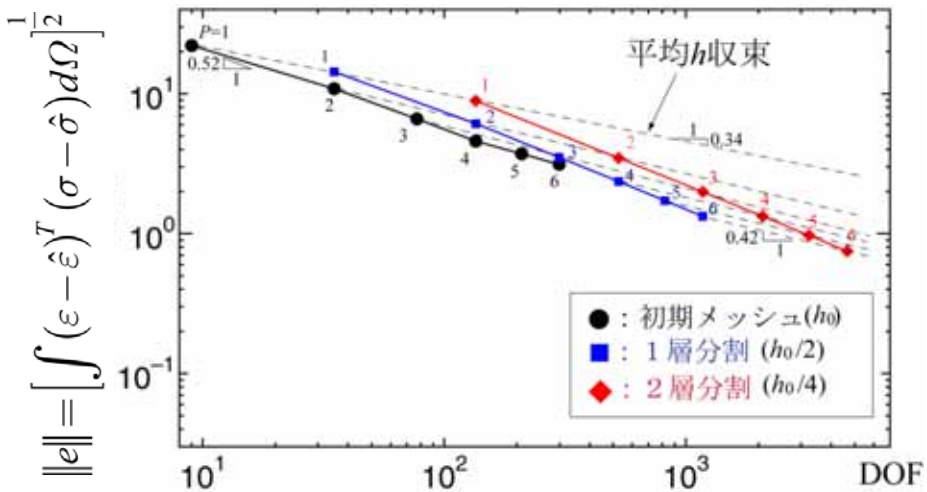


図-9　特異性を有する非均質L型領域問題の2層分割モデル_(c)-3



DOF=自由度
Eror=エネルギーノルムでの相対誤差

(c)のパーセント誤差とDOFの関係

付録

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

［補］収束性に関するケーススタディ：高次化による精度向上～p収束（均質・特異）～

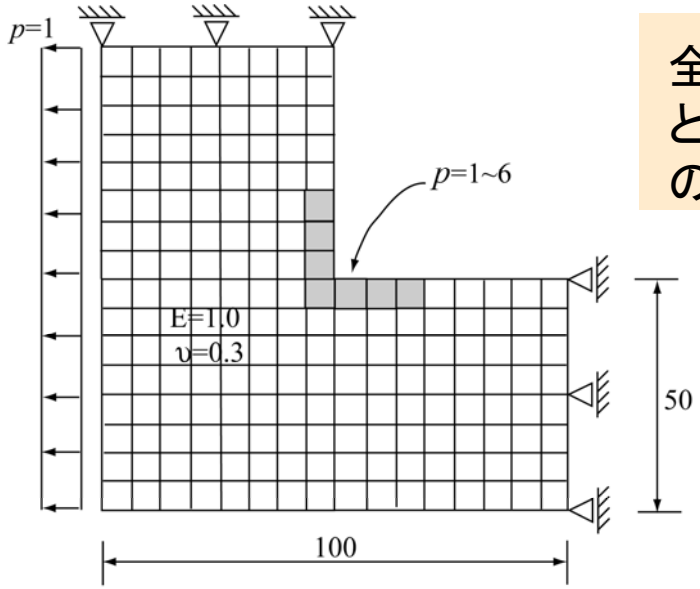
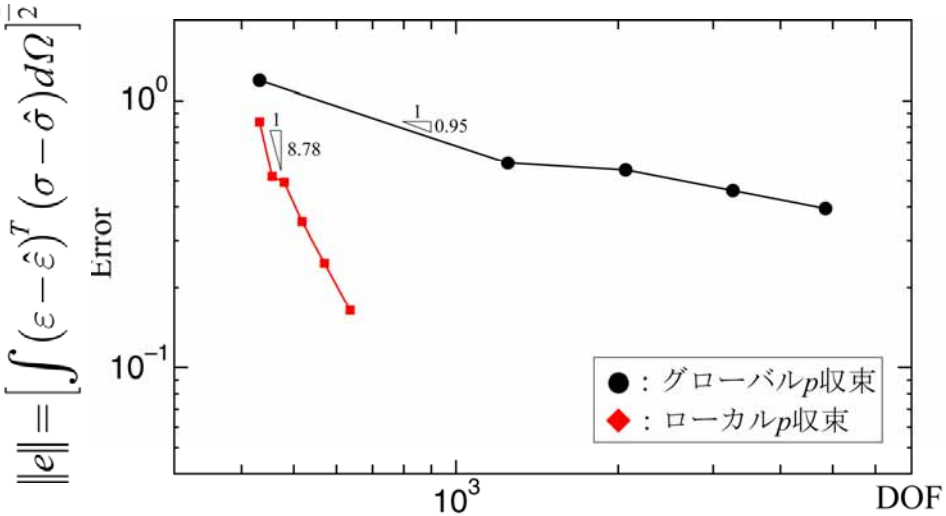


図-17　グローバル*p*-法とローカル*p*-法との比較のモデル(1)

全体に次数を上げる場合（グローバル p 収束）と局所的に次数を上げる方法（ローカル p 収束）の比較



DOF=自由度
Eror=エネルギーノルムでの相対誤差

図-19　グローバル*p*-法とローカル*p*-法における
エネルギーノルムの相対誤差とDOFとの関係(1)

付録

1. メッシュや要素で答えが変わる

1.1「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

［補］収束性に関するケーススタディ：高次化による精度向上～p収束（非均質・特異）～

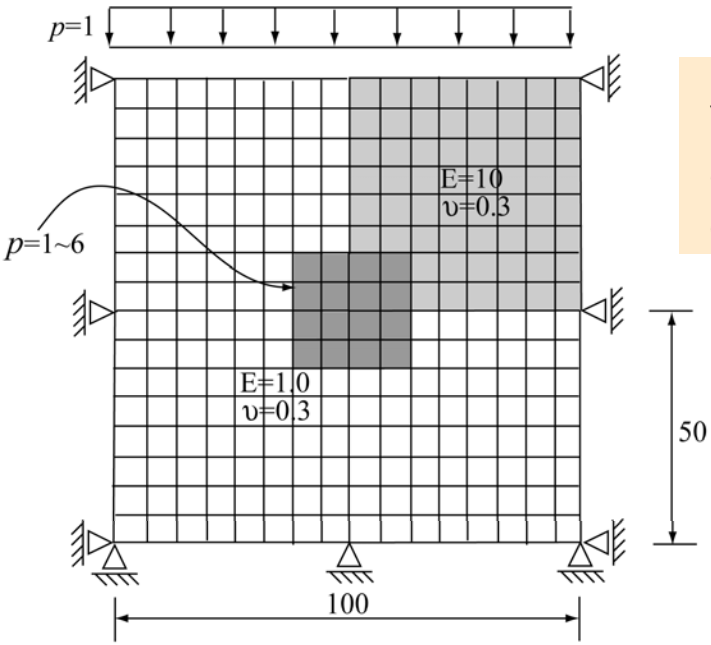
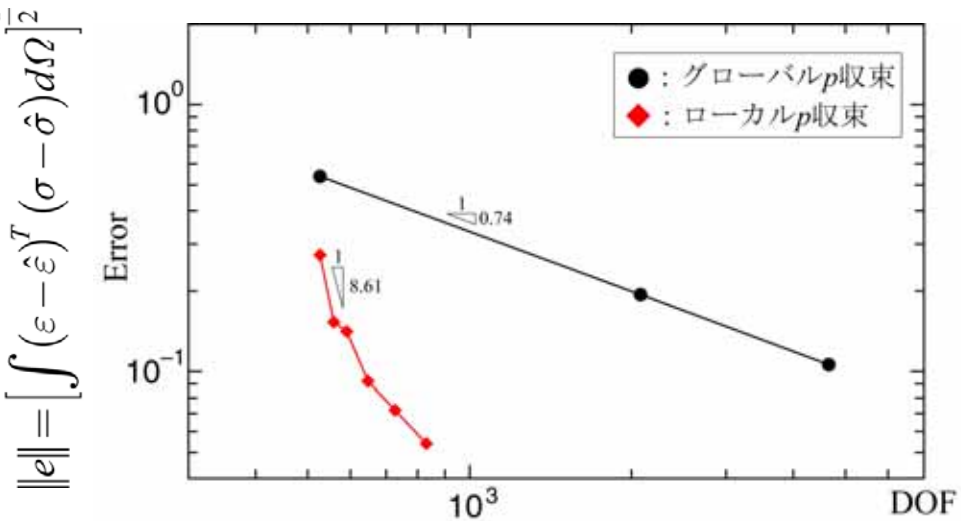


図-18　グローバル*p*-法とローカル*p*-法との比較のモデル(2)

全体に次数を上げる場合（グローバル p 収束）と局所的に次数を上げる方法（ローカル p 収束）の比較



DOF=自由度
Eror=エネルギーノルムでの相対誤差

グローバル*p*-法とローカル*p*-法における
エネルギーノルムの相対誤差とDOFとの関係(2)

第23話：固体の非線形解析における2つの論点

- ”速度形”の正体
  - 我が国のほとんどの教科書が，平衡方程式を速度形（rate form）を示した上で，非線形解析を解説している
    - 特に弾塑性問題のように，変形速度を導入する材料モデルの場合，弾性の構成方程式を速度形で書くことがある
      - モデルだからあまり文句は言えない
    - しかし，平衡方程式は物理法則なので速度形は満たすべき支配方程式ではない
  - 平衡方程式を速度形にしたものは，接線剛性行列や接線係数の形式の参照となる程度のものであって，固体の非線形解析には必須ではない
- Total と Updated Lagrangian は何が違うのか？
  - 固体の解析は基本的にLagrangian
  - Total Lagrangian と Updated Lagrangian の違いは，
    - 弱形式を基準（初期）配置で書くか，現配置（変形後）で書くか
      - どちらで書いても仕事量（エネルギー）は不変
    - 対象としている問題に対するプログラム内のオペレーションの数程度 → 区別しなければならないほど解法としての違いはない．